Übungen Beweise

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

Aufgabe 1

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen oben die Aussage:

(a) Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

(b) Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

Aufgabe 2

Seien A und B endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von A.
Beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

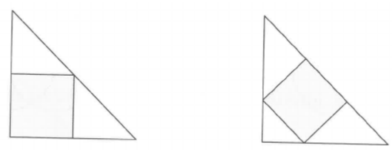
Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Paare von ganzen Zahlen (m, n) mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1.$$

Aufgabe 4

In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Geben Sie möglichst viele verschiedene Begründungen an!

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von n).