Teamwettbewerb - Lösungen

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ stets die Menge der natürlichen Zahlen. Die Gauß Summenformel der ersten $n \in \mathbb{N}$ natürlichen Zahlen ist $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Aufgabe 1 Tetraeder (6 Punkte)

Beweise oder widerlege die Aussage: Man kann die vier Seiten eines Tetraeders mit vier verschiedenen natürliche Zahlen beschriften, sodass sich die vier Summen der Seiten um die Ecken um höchstens 2 unterscheiden.

Lösung Die Aussage ist falsch. **(3 Punkte)** Seien die vier verschiedenen Beschriftungen der Seiten $x, y, z, v \in \mathbb{N}$, so gilt für die Summen in den Ecken

$$x + y + z = s_1, \quad x + y + v = s_2, \quad x + z + v = s_3, \quad y + z + v = s_4$$

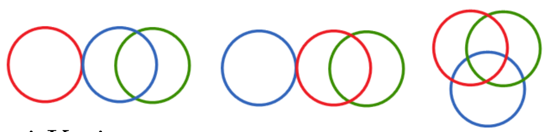
Da sich die linken Seiten stets in genau einer Variable x, y, z, v unterscheiden, sind auch die rechten Seiten verschieden: es gilt $s_i \neq s_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$ und für den größten Abstand daher stets $\max_i s_i - \min_i s_i \geq 3$. **(Begründung: 3 Punkte)**

Weitere Forschung in Uni Mathe-AG: Für welche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}, n, k \geq 3$, kann man die vier Seiten eines Tetraeders mit verschiedenen natürliche Zahlen $\leq n$ beschriften, sodass sich die vier Summen der Seiten um die Ecken um höchstens k unterscheiden? Wie viele verschiedene Beschriftungen gibt es?

Aufgabe 2 Olympische Ringe (8 Punkte)

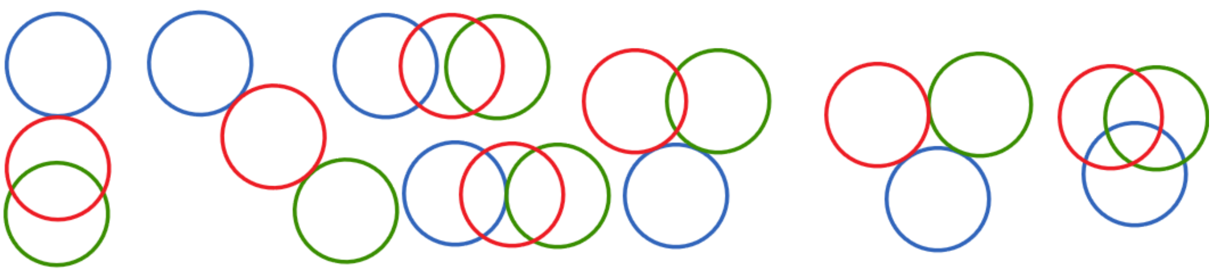
Wir betrachten Anordnungen von drei Kreisen (Kreisrand $\neq$ Kreisfläche!) mit identischem Radius und verschiedenen Farben in der Ebene wobei:

- Es gibt genau 0 oder 1 oder 2 Schnittpunkte von zwei verschiedenen Kreisen, d.h. bei einem Schnittpunkt berühren sich die Kreise
- Jeder Kreis besitzt mindestens einen Schnittpunkt mit einem anderen Kreis
- In jedem Punkt der Ebene sind höchstens 2 Kreise
- Zwei Anordnungen seien identisch, falls Sie durch Verschieben der Ringe oder Spiegeln der Anordnung erhalten werden, wobei die Anzahlen der Schnittpunkte zwischen jeweils zwei Kreisen nicht verändert werden!

Beispiel für drei verschiedene Anordnungen: 

Bestimme die Anzahl aller Anordnungen für drei Kreise.

Lösung Es gibt diese 7 Figuren der Anordnungen, wobei die erste Figur links mit $3! = 6$ multipliziert wird, die nächsten vier Figuren mit 3:



(5 restliche gefunden: 5 Punkte. Umordnung: 2 Punkte) Begründung, dass dies alle Anordnungen sind **(1 Punkt)**: Zwischen den drei Ringen gibt es entweder 0 oder 1 oder 2 Schnittpunkte und die gesamte Figur muss zusammenhängend sein: Also erhalten wir für die Anzahlen der Schnittpunkte (Strich bedeutet Verbindung durch Kreis):

$$1-2-0-,\ 1-1-0-,\ 2-2-0-,\ 2-2-1-,\ 2-1-1-,\ 1-1-1-,\ 2-2-2-$$

Diese können unterschiedlich umgeordnet werden. Für $1-2-0-$ gibt es einzig 6 Farbanornungen, für die folgenden 3, für die letzten beiden Sequenzen nur eine. Also erhalten wir $2+6+4\cdot 3=20$ verschiedene Anordnungen.

Weitere Forschung in Uni Mathe-AG: Anzahl Anordnungen für $n\geq 4$ Kreise?

Aufgabe 3 Lotteriespiel (3+3+3+3 Punkte)

Sei eine Urne von r roten und b blauen Kugeln (die sich nur durch Farben unterscheiden). Es wird abwechselnd zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Wer zuerst eine rote Kugel zieht, gewinnt. Für ein Lotteriespiel von zwei Spielern sei $p_r(b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der beginnende Spieler gewinnt. Bestimme mit Begründung:

(a) $p_1(6)$ und $p_1(7)$.

(b) Eine allgemeine Formel $p_1(b)$ für $b\in\mathbb{N}$.

(c) $p_2(4)$ und $p_2(5)$.

(d) Eine allgemeine Formel $p_2(b)$ für $b\in\mathbb{N}$.

Lösung Wir betrachten alle Möglichkeiten von Ziehungen, auch nach der ersten roten Kugel. Ist diese schon gezogen, können im Spiel die weiteren Ziehungen ignoriert werden.
(a)+(b) : Für $1+b$ gerade, d.h. b ungerade, ziehen beide Spieler maximal $(1+b)/2$ Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit für die rote Kugel an den ungeraden Zügen (beginnender Spieler) ist gleich wie an den geraden Zügen, d.h. für b ungerade ist stets $p_1(b)=1/2$. Für $1+b$ ungerade, d.h. b gerade, zieht der erste Spieler maximal $b/2+1$ Kugeln (es gibt mehr ungerade Züge!), der zweite $b/2$. Also ist dann $p_1(b)=\frac{b/2+1}{1+b}=\frac{1}{2}(\frac{b+2}{b+1})>\frac{1}{2}$.
Insbesondere erhalten wir $p_1(6)=4/7$, $p_1(7)=1/2$.

(c)+(d) : Der beginnende Spieler gewinnt nur, falls die erste rote Kugel im ungeraden Zug $2k-1, k=1,2\ldots$ gezogen wird, die zweite in den Zügen $2k,2k+1,\ldots$ danach. Die Wahrscheinlichkeit für die erste rote Kugel im Zug $2k-1, k=1,\ldots,$ (und somit zugleich die zweite rote Kugel im Zug $2k,\ldots,2+b$) ist also stets $\frac{1}{2+b}\cdot\frac{(2+b)-(2k-1)}{1+b}=\frac{3+b-2k}{2(2+b)(1+b)}$.
Im weiteren benötigen wir die Summenformeln für die ersten n geraden $\sum_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$ bzw. für die ersten n ungeraden Zahlen $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Die erste folgt direkt aus Gauß Summenformel und die zweite durch: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{n}2k=\frac{2n(2n+1)}{2}-n(n+1)=n(2n+1)-n(n+1)=n^2$. (Weitere Beweise in der **Mathe-AG**).
Für $2+b$ gerade, d.h. b gerade, ziehen beide Spieler maximal $(2+b)/2$ Kugeln und daher folgt mit (ungerade:) $\sum_{k=1}^{(2+b)/2}((2+b-2k)+1)=\sum_{k=1}^{(2+b)/2}(2k-1)=\frac{1}{4}(2+b)^2$ als Summe $p_2(b)=\sum_{k=1}^{(2+b)/2}\frac{3+b-2k}{2(2+b)(1+b)}=\frac{\sum_{k=1}^{(2+b)/2}((2+b-2k)+1)}{2(2+b)(1+b)}=\frac{(2+b)^2/4}{2(2+b)(1+b)}=\frac{1}{2}(\frac{b+2}{b+1})>\frac{1}{2}$.
Für $2+b$ ungerade, d.h. b ungerade, hat der beginnende Spieler maximal $(3+b)/2$ Züge (evtl. einen Zug mehr!) und die Argumentation erfolgt analog mit Summenformel (gerade:) $\sum_{k=1}^{(3+b)/2}(3+b-2k)=\sum_{k=1}^{(3+b)/2}2(\frac{3+b}{2}-k)=\sum_{k=1}^{(3+b)/2-1}(2k)=(\frac{3+b}{2}-1)\frac{3+b}{2}=\frac{1}{4}(b+1)(b+3)$.
Damit folgt $p_2(b)=\sum_{k=1}^{(3+b)/2}\frac{3+b-2k}{2(2+b)(1+b)}=\frac{(b+1)(b+3)/4}{2(2+b)(1+b)}=\frac{1}{2}(\frac{b+3}{b+2})>\frac{1}{2}$.
Insbesondere erhalten wir $p_2(4)=3/5$, $p_2(5)=4/7$.

Weitere Forschung in Uni Mathe-AG: Eine allgemeine Formel $p_r(b)$? Eine Formel $p_1(b)$ für $n\geq 3$ Spielern?