Uni Mathe-AG Skript

Schuljahr 2024/2025

Peter Parczewski

(erste Version - fortlaufend ergänzt und korrigiert)

22. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Mathematische Grundbegriffe

> Bisher konnte noch nicht bewiesen werden, daß irgend etwas in der Mathematik schwierig ist.
>
> Norbert A'Campo

- Gegenstände der Mathematik sind **mathematische Sätze** und **Beweise**.
- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage.
- Der **Beweis** ist eine logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und Definitionen
- Eine **Definition** erklärt einen Begriff oder Zusammenhang durch bereits bekannte Begriffe und Zusammenhänge.
- **Mathematik** ist demnach die Tätigkeit, aus Sätzen und Beweisen, **neue** Sätze und **neue** Beweise zu erzeugen!

In diesem Kapitel führen wir einige Grundbegriffe ein. Viele werden wir sehr selten oder nie brauchen, insofern ist **dieses Kapitel nur zum Nachschlagen** und der Vollständigkeit halber.

Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist).
Tertium non datur (Ein Drittes gibt es nicht. Aristoteles).

Das sind (aussagenlogische) Aussagen :

- $4 > 49/8$
- Es existiert eine Lösung von $x^2 = 42$
- Es gibt unendlich viele Primzahlen

Das sind keine Aussagen:

- Guten Tag!
- $3 + 2 <$
- 42

Die **Aussagenoperationen**, d.h. zusammengesetzte Aussagen für Aussagen A und B, sind:

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B)
	(A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **logisch äquivalent**)

Die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen werden durch **Wahrheitstabellen** bzw. **Wahrheitstafeln** festgelegt bzw. definiert.

Die **logische Äquivalenz** von Aussagen erfolgt ebenfalls durch Betrachtung von Wahrheitstafeln, wie in den letzten beiden Spalten veranschaulicht. Wir kürzen im Weiteren wahr (w) und falsch (f) ab:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f	f	f
f	w	w	f	w	f	w	w
f	f	f	f	w	w	w	w

Die Gleichheit der letzten beiden Spalten beweist die Aussage: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.
$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**). Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert. Beispiele:

- neue Aussagenoperation $A|B :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$.
- $\sqrt{2} :=$ die positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst
- $n \in \mathbb{N}$ ist teilbar durch $m \in \mathbb{N}$ $:\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$

Ein **Prädikat** $p(x)$ wird erst durch Einsetzen von x zu einer Aussage, ein Beispiel ist $x > 3$.

Mengen

Definition 1.1. *Eine* **Menge** M *ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt* **Elemente**. *Die* **Elementbeziehung** *wird geschrieben als:*

$x \in M$ *bedeutet:* x *ist Element der Menge* M

$x \notin M$ *bedeutet:* x *ist nicht Element der Menge* M $\quad (x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M))$

*Definition einer Menge oftmals mittels einer Aussage als Bedingung (**geschweiften Klammern!**):*

$$M := \{x : p(x)\} \quad \text{bzw.} \quad M := \{x \,|\, p(x)\} \quad \text{(d.h. Menge der } x \text{, für die } p(x) \text{ gilt)}$$

Beispiele:

- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (Es gibt hier nur drei verschiedene Elemente!)
- $\{2, \text{Olaf Scholz}, \{1, 2, 3\}\}$ (Elemente sind beliebig, können auch selbst Mengen sein!)

Relationen und Definitionen für Mengen A und B:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow$ für alle $x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	**Gleichheit** (für Mengen!)
$A \subset B$ $(A \subsetneq B)$ $:\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$	A **echte Teilmenge** von B

$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**, Menge von **2-Tupeln**
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	**Komplement** von B in A

Beispiele:

- $\{1,2\} \cup \{0,1,5\} = \{0,1,2,5\}$, $\{1,2\} \cap \{0,1,5\} = \{1\}$ und $\{1,2\} \setminus \{0,1,5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$
- $\{1,2,3\} \times \{A,B\} = \{(1,A),(2,A),(3,A),(1,B),(2,B),(3,B)\}$
- $A_1 \times \cdots \times A_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}$ Menge von **k-Tupeln**

Beachte den Unterschied geschweifte und runde Klammer!

Menge	$\{\ldots\}$	Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
Tupel/Vektor	$(\ldots)$	Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

Wichtige Zahlenmengen:

- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen : $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$
- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}$ ($\mathbb{N}$ **mit Null:** $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$)
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl).
- **Intervalle in** $\mathbb{R}$

  $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

  $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

  $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$, $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ (halboffenes Intervall)

$-\infty$ und ∞ sind nur am offenen Rand eines Intervalls zugelassen, z.B. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
$[0,\infty)$ sind die nichtnegativen reellen Zahlen, $(0,\infty)$ die positiven reellen Zahlen.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \le c$ bzw. $a \ge c$ für alle $a \in M$. Man nennt c als **obere/untere Schranke**.
Die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn M nach oben und unten beschränkt ist, ansonsten heißt M **unbeschränkt**.
Für eine nach oben beschränkte nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\max M$ das **Maximum** das größte Element in M und für eine nach unten beschränkte nichtleere Menge bezeichnen wir mit $\min M$ das **Minimum** das kleinste Element in M.
Für ein abgeschlossenes Intervall ist $\max[a,b] = b$ und $\min[a,b] = a$.
Andererseits ist z.B. $(0,1) \subset \mathbb{R}$ beschränkt, besitzt aber weder Maximum noch Minimum!

Funktionen

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ **eindeutig** ein $f(a) = b \in B$ zu (f *von* A *nach* B).
Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b.

Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a)|a \in C\} \subseteq B$ das **Bild** von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a|f(a) \in D\} \subseteq A$ das **Urbild** von D.
Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich** und A **Definitionsbereich** von f.
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$
surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(A) = B$
bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** f.

Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)

  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)
- **rationale Funktionen** $p(x)/q(x)$ (für Polynome p, q), z.B. Hyperbelfunktion $1/x$
- Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Bijektion. Die Inverse ist die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.
- **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), e^x = \exp(x)$ ($e \approx 2.718$ Eulersche Zahl) und die Umkehrfunktion: (natürliche) **Logarithmusfunktion** $\ln(x)$
- **trigonometrische Funktionen** $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ und die Umkehrfunktionen
- **Anzahl Elemente**: $|\cdot| \ : \{M \subset \mathbb{Z} : M \text{ endlich}\} \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, M \to |M|$
- **Indikatorfunktion** für eine Menge $M \subseteq A$: $\mathbb{1}_M : A \to \{0, 1\},\ \mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$
- **Obere/untere Gaußklammer** sind die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ des auf- bzw. abrunden:

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}, \qquad \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : x \geq z\}.$$

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren. Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.
Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt. Ansonsten heißt die Menge **überabzählbar**.
Prima Tool für Visualisierung von Funktionen und Berechnungen: `www.desmos.com`.

Kapitel 2
Abzählen

Abkürzungen: **Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

- Für eine endliche Menge M bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente.**
- **Summenregel:** Für disjunkte Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$
- **Produktregel:** Für beliebige Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$
- Für endliche Mengen A, B und die Menge aller Abbildungen $\{f : A \to B\} \ =: B^A$ ist daher $|B^A| = |B|^{|A|}$
- **Bijektionsregel:** Existiert für endliche Mengen A und B eine Bijektion, so ist $|A| = |B|$

Beispiele:

- Es ist $|\{1, 2, 3, 4/2, 2+1\}| = 3$ da $\{1, 2, 3, 4/2, 2+1\} = \{1, 2, 3\}$
- Es gibt 2^8 viele 01-Folgen der Länge 8, da $|\{0, 1\}^{\{1,2,\ldots,8\}}| = 2^8$ (Produktregel).
- Es gibt im Alphabet mit 26 Buchstaben 26^5 ($> 11 \cdot 10^6$) mögliche Wörter der Länge 5 (die meisten ohne Bedeutung!)

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen, so gibt es zwei Beweismethoden: Zum einen **(vollständige) Induktion**:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Es gilt } A(1) & \textbf{(Induktionsanfang)} \\ \forall n \geq 1 \ : \ A(n) \Rightarrow A(n+1) & \textbf{(Induktionsschritt)} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ A(n)$$

Zum anderen **Abzählen**.
Das folgende Resultat verwenden wir als ein Beispiel für beide Beweismethoden:

Satz 2.1 (Anzahl Potenzmenge)**.** *Sei M eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen. Dann hat die Potenzmenge genau 2^n Elemente, d.h. es gilt:*

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Beweis durch Induktion. Sei $M = \emptyset$, so hat $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$ offenbar genau ein Element und die Aussage ist wahr: $1 = 2^0$ (**Induktionsanfang**).
Angenommen, die Aussage ist bereits wahr für $n \in \mathbb{N}_0$ (Induktionsvoraussetzung), dann ist für eine Menge mit $n+1$ Elementen $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$: Eine Teilmenge enthält a_{n+1} oder nicht.

Es gibt nach *Induktionsvoraussetzung* genau 2^n Teilmengen ohne a_{n+1}. Ebenso gibt es genau 2^n Teilmengen mit a_{n+1}. Also ist die Anzahl der Teilmengen von M tatsächlich $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. (**Induktionsschritt**). □

Beweis durch Abzählen. Jede Teilmenge $U \subseteq M$ einer Menge $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ mit n Elementen kann mittels einer 01-Folge kodiert werden, je nachdem, ob das k-te Element von M enthalten ist oder nicht: $\mathbb{1}_U(m_k) := \begin{cases} 1, & m_k \in U \\ 0, & m_K \notin U \end{cases}$. Das ergibt eine Bijektion:

$$\mathcal{P}(M) \to \{0,1\}^n, \quad U \mapsto (\mathbb{1}_U(m_1), \mathbb{1}_U(m_2), \dots, \mathbb{1}_U(m_n)) \in \{0,1\}^n$$

(Beispielsweise ist die Teilmenge $\{0,3\} \subset \{0,1,2,3\}$ kodiert mittels $(1,0,0,1)$). Mit $|\{0,1\}^n| = 2^n$ (Produktregel) und Bijektion folgt mit Bijektionsregel auch $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$. □

Satz 2.2. *Sei $A(n)$ die Anzahl aller* ***Umordnungen (Permutationen)*** *der Zahlen $1, \dots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:*

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n =: n! \quad \text{(Fakultät von } n\text{)}$$

Beweis. Wir zählen die Anzahl der Umordnungen von $1, 2, \dots, n$. Für das erste Element 1 haben wir n Plätze. Für das zweite Element 2 haben wir anschließend nur noch $n-1$ Plätze. Usw: Für das k-te Element haben $n-k+1$ Plätze. Also folgt die Behauptung. □

Damit haben wir insgesamt:

- Anzahl der k-**Tupel** in der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$: n^k (Produktregel)
- Anzahl der k-**Tupel** ohne Wiederholung: $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$
- Für eine endliche Menge $|A| = n$ ist $|\{f : A \to A \text{ bijektiv}\}| = n!$

Satz 2.3. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit $n \geq k$ Elementen ist*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} =: \binom{n}{k} \quad (\textbf{Binomialkoeffizient})$$

Wir setzen zudem $0! = 1$ (leeres Produkt) und daher $\binom{n}{0} := 1$.

Beweis. Für das erste Element der Teilmenge haben wir n Elemente zur Auswahl, für das zweite $n-1$, usw. Für das k-te Element der Teilmenge gibt es noch genau $n-(k-1) = n-k+1$ Elemente zur Auswahl. Die gleiche Teilmenge können wir jedoch auch in anderer Reihenfolge erhalten. Die Anzahl der Umordnungen ist $k!$ (Satz 2.2). Also folgt die behauptete Formel. □

Beispiele:

- Aus 5 verschiedenen Früchten kann man $2^5 - 1 = 31$ verschiedene Obstsalate (mit mindestens einer Frucht) auswählen.
- 16 verschiedene Bücher können auf $16!$ ($> 2 \cdot 10^{13}$) verschiedene Arten in einem Buchregal angeordnet werden.
- Unter 7 Personen kann man $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ verschiedene Dreiergruppen wählen.