Funktionalanalysis

Vorlesung HWS 2024

Dr. Peter Parczewski

26. August 2024

Veranstalter

Dr. Peter Parczewski peter.parczewski@uni-mannheim.de

Assistenten:

Tilman Aach tilman.aach@students.uni-mannheim.de

Moritz Melcher moritz.melcher@students.uni-mannheim.de

Sekretariat:

Karin Bühl karin.buehl@uni-mannheim.de

Lehrstuhl:

Wirtschaftsmathematik II: Stochastische Numerik
(Prof. Dr. Neuenkirch)

Lehre

Alle Materialien in ILIAS:

- Skript, Folien (Vorlesungen und Quizze)
- $\geq$ 12 Übungsblätter, Übungen + Lösungen
- Übungen: Abgabe in 2-er Gruppen möglich

Vorlesungen (Präsenz):

Donnerstag	10.15-11.45 in C 014 Hörsaal, A 5, 6 Bauteil C
Freitag	10.15-11.45 in C 014 Hörsaal, A 5, 6 Bauteil C

Übungen:

Donnerstag	13.45-15.15 in C 014 Hörsaal A 5, 6 Bauteil C

Materialien in ILIAS

- **Forum (Ankündigungen, Korrekturen)**
- **Folien**
- **Skript**
- **Übungen (teils Lösungsvorschlag)**
- **Quizze**

Prüfung

Mündliche Prüfungen

Termine (Dezember 2024 - Februar 2025) werden Nov/Dez vereinbart

Prüfungszulassung

Je 50% Punkte der Übungen in erster und zweiter Hälfte des Semesters

Funktionen als Elemente in einem Vektorraum

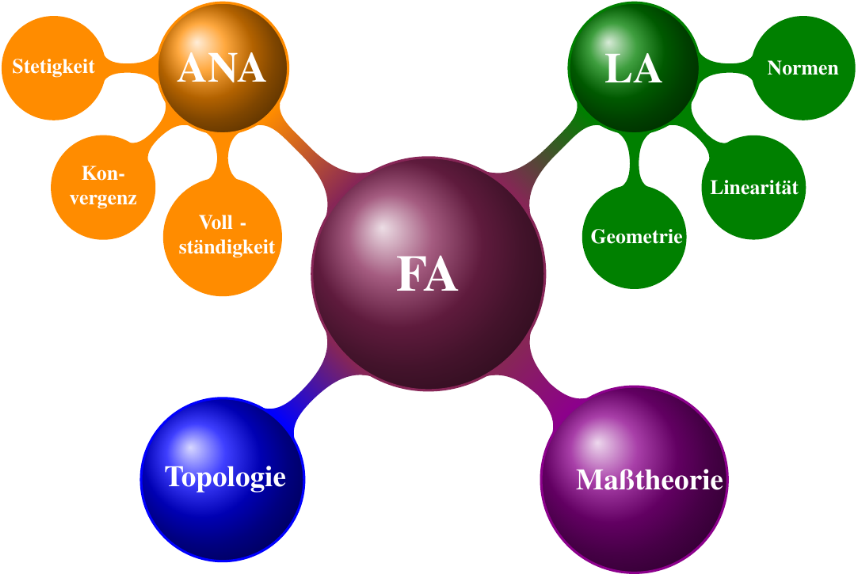
Werkzeuge

- Analysis (**ANA**) (Konvergenz, Approximation)
- Lineare Algebra (**LA**) (Lineare Strukturen, Geometrie)

Funktionalanalysis (FA) = ANA + LA

Einzige Voraussetzungen: ANA + LA

FA: Verbindungen und häufige Begriffe



FA: Anwendungen

- Differentialgleichungen (**Existenz, Approximation**)
- Stochastik (**stochastische Integration**)
- Numerik/Optimierung (**finite Elemente**)
- PDEs (**schwache Lösung**)
- Finanzmathematik (**Optionsbewertung**)

Beispiel: Integralgleichung

Gesucht ist eine Funktion $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^1 e^{s^2+t^2}\, x(t)\, dt + x(s) = \sin(s), \;\; s \in [0,1] \quad ?$$

FA ▶ Es existiert eindeutige stetige Lösung

FA ▶ allgemeine Theorie

($\sim$ Randwertprobleme, ODEs, PDEs)

$$\int_0^1 \cos(\lfloor 10\, st \rfloor)\, x(t)\, dt = \sin(s), \;\; s \in [0,1] \quad ?$$

(wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$)

FA ▶ Es existiert eindeutige Lösung $x \in L^2([0,1])$

FA ▶ L^2-Approximation mit Eigenwerten/Eigenfunktionen

Zur Vorbereitung - ein Quiz

Hinweise:

- 4 Multiple-Choice Fragen
- Es können 0 - 4 Antworten (A - D) korrekt sein!
- Wer solche Fragen interessant findet, ist bei Funktionalanalysis richtig!

Quiz

Frage 1

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, wenn:

A $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; : \;\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

B f ist auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

C $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 : \; \{f^{-1}(y) : |y - x| < \varepsilon\}$ ist offen

D Gleichmäßig stetig? Habe ich noch nie gehört!

Quiz

Frage 2

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn:

A In jeder endlichen Überdeckung mit offenen Mengen $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ genügt bereits eine Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I'} O_i$ für $I' \subsetneq I$

B $\exists \varepsilon > 0 : A \subset \{x : \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \varepsilon\}$

C Das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen und unbeschränkt

D Kompakt? So wie Compact disc? Heute gibt es doch MP3!

Quiz

Frage 3

Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Dann gilt:

A f ist stetig

B f ist differenzierbar

C f ist Lebesgue-integrierbar

D f ist gleichmäßig stetig

Quiz

Frage 4

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

A f ist Lipschitzstetig, d.h.

$$\exists\, L \in (0, \infty)\ \forall x, y \in K \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$$

B f ist beschränkt

C f nimmt auf K ein Minimum an

D $f(K)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$

Quiz: Lösungen

Frage 1

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, wenn:

A $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;:\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ✓

B f ist auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar **Nö, z.B. $f(x) = e^x$**

C $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 :\; \{f^{-1}(y) : |y - x| < \varepsilon\}$ ist offen **Nö, s.o.**

D Gleichmäßig stetig? Habe ich noch nie gehört!

Quiz: Lösungen

Frage 2

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn:

A In jeder endlichen Überdeckung mit offenen Mengen $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ genügt bereits eine Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I'} O_i$ für $I' \subsetneq I$

Nö, eine endliche Teilüberdeckung

B $\exists \varepsilon > 0 : A \subset \{x : \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \varepsilon\}$

Nö, nur wenn A abgeschlossen

C Das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen und unbeschränkt

Nö, $\mathbb{Z}^n$ wäre sonst kompakt

D Kompakt? So wie Compact disc? Heute gibt es doch MP3!

Quiz: Lösungen

Frage 3

Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Dann gilt:

A f ist stetig ✓

B f ist differenzierbar

C f ist Lebesgue-integrierbar ✓

D f ist gleichmäßig stetig ✓

Quiz: Lösungen

Frage 4

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

A f ist Lipschitzstetig, d.h.
$\exists\, L \in (0, \infty)\ \forall x, y \in K \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$
Nö, z.B. $f(x) = \sqrt{x}$

B f ist beschränkt ✓

C f nimmt auf K ein Minimum an ✓

D $f(K)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$ ✓