Teamwettbewerb - Lösungen

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Bäuerin Berta hat sich eine einfache Methode ausgedacht, ihre verschiedenen Ziegen zu kennzeichnen: Am Halsband baumelt ein Drahtquadrat, dessen vier Kanten jeweils genau in der Mitte entweder mit oder ohne einer glitzernden Perle versehen sind. Die **Muster** von Perlen sind gleich, wenn sie durch Drehen oder Wenden des Quadrates ineinander übergehen. Beweise und begründe:

(a) Bäuerin Berta kann höchstens sechs verschiedenen Ziegenrassen kennzeichnen, d.h. es gibt genau sechs verschiedene Muster.

Bei der Produktion der Quadrate wird an jeder Kante ganz zufällig (d.h. mit der Wahrscheinlichkeit 1/2) eine Perle eingefügt. Dann haben alle Muster mit genau ein oder drei Perlen die gleiche Wahrscheinlichkeit wie alle anderen Muster.

Bäuerin Berta reichen die sechs Muster einfach nicht. Sie denkt weiter und verwendet nun kleine Holzwürfel, dessen sechs Seiten jeweils mit oder ohne einer glitzernden Perle versehen sind. Erneut sind zwei Muster identisch, wenn sie durch Drehen des Würfels ineinander übergehen.

(b) Bestimme die Anzahl der verschiedenen Muster und bestimme anschließend bei zufälliger Produktion wie in (a) die Muster mit der größten Wahrscheinlichkeit.

Lösung (a) Sei 1 für Perle vorhanden, so gibt es folgende Muster mit Vielfachheit durch Drehen, die Aussagen folgen direkt daraus:

$$0000, \quad 1000\ (\times 4), \quad 1100\ (\times 4), \quad 1010\ (\times 2), \quad 1110\ (\times 4), \quad 1111.$$

(b) Sei 1 für Perle vorhanden, 0 sonst, so ist mit $\binom{6}{2} = 15, \binom{6}{3} = 20$ und Symmetrie (k Perlen oder k Leerstellen) die Anzahl (rechts Wahrscheinlichkeit) der Muster durch Drehen:

000000 bzw. 111111 ($je \times 1$)	$2^{-6} = 1/64$
100000 bzw. 011111 ($je \times 6$)	$6/64 = 3/32$
2 Perlen bzw. 2 Leerstellen gegenüber ($je \times 3$)	$3/64$
2 Perlen bzw. 2 Leerstellen nebeneinander ($je \times\ 15 - 3 = 12$)	$12/64 = 3/16$
3 Perlen um eine Würfelecke gelegen ($\times 8$)	$8/64 = 1/8$
3 Perlen nicht um eine Würfelecke gelegen ($\times\ 20 - 8 = 12$)	$3/16$

Die Muster mit der größten Wahrscheinlichkeit sind: genau 2 Perlen nebeneinander oder genau 2 Leerstellen nebeneinander oder genau 3 Perlen um eine Ecke.
(Weitere Varianten und Fragestellungen $\rightsquigarrow$ **Uni Mathe-AG!**)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

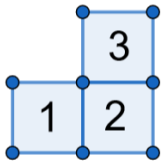
Seien beliebige $x, y, z > 0$. Beweise $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \dfrac{3}{1/x + 1/y + 1/z}$.

Lösung Für $a > 0$ ist wegen $0 \leq (1/a - a)^2 = 1/a^2 - 2 + a^2 \Leftrightarrow 2 \leq 1/a^2 + a^2$ und so für alle $b > 0$ auch $b + 1/b \geq 2$. Damit gilt die zur Behauptung äquivalente Ungleichung

$$(x+y+z)(1/x+1/y+1/z) = 1+1+1+x/y+y/x+x/z+z/x+y/z+z/y \geq 3+3\cdot 2 = 9.$$

Aufgabe 3 (2 + 3 + 3 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ verschiedene quadratische Spielsteine. Eine **Figur** besteht aus Spielsteinen in der Ebene, die sich nur und genau an den Kanten berühren. Dabei sind zwei Figuren identisch, wenn sie durch Drehen oder Wenden ineinander übergehen. Ein Beispiel einer Figur für $n = 3$ siehe rechts. *Hinweis:* Die Anzahl aller Anordnungen von $n \in \mathbb{N}$ Zahlen ist $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.



(a) Bestimme die Anzahl der Figuren für $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Bestimme die Anzahl der Figuren für $n = 4$.

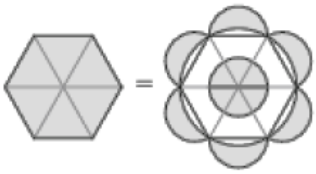
(c) Bestimme die Anzahl der Figuren für $n = 5$. (Nur als Zusatzpunkte gewertet)

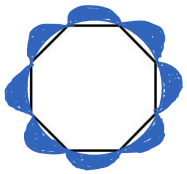
Lösung (a) Für $n = 2$ gibt es genau eine Figur: $\boxed{1}\boxed{2}$. Für $n = 3$ gibt es genau zwei Positionen für Lage (in Reihe oder in L-Form) und darauf die drei Verteilungen $123, 231, 312$. Also gibt es genau $6 = 2 \cdot 3$ Figuren.
(b) Für $n = 4$ gibt es genau 5 Positionen für Lage (welche? $\rightsquigarrow$ **Uni Mathe-AG!**) und darauf je nach Symmetrien (Gleichheit unter Drehen/Wenden) genau 24 (nur bei der Position L), 12 oder 3 (nur auf dem Quadrat aus vier Quadraten) Verteilungen der Zahlen $1, 2, 3, 4$. Dies ergibt 63 Figuren.
(c) Für $n = 5$ gibt es genau 12 Positionen für Lage ($\rightsquigarrow$ **Uni Mathe-AG!**) und darauf je nach Symmetrien $120, 60$ oder 15 Verteilungen der Zahlen $1 - 5$. Dies ergibt 975 Figuren.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

(a) Sei ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge $a > 0$, dem Umkreis und den Halbkreisen mit Radius $a/2$ auf den Seiten sowie einem Kreis im Zentrum mit Radius $a/2$, siehe Abbildung links. Beweise, dass die grauen Flächen gleich sind.

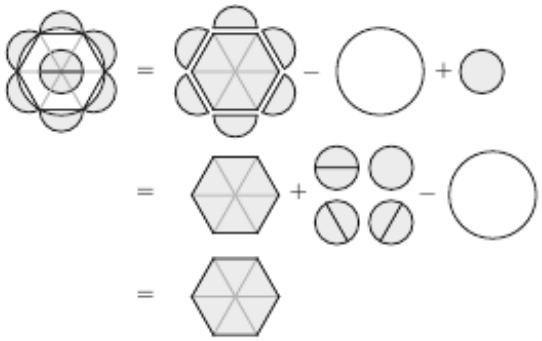
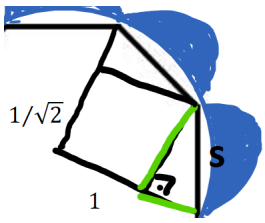
(b) Sei eine anologe Figur mit einem regelmäßigen Achteck mit Umkreisradius 1 und Halbkreisen über allen Seiten, Abbildung rechts (grobe Skizze). Beweise, dass alle blauen Sicheln (also Achteck mitsamt Halbkreise − Umkreis) die Fläche $\pi + (2 - \pi)\sqrt{2}$ besitzen.





Lösung

(a) Mit Kreisfläche Formel ist die Fläche Umkreis mit Radius a identisch mit der Fläche von vier Kreisen mit Radius $a/2$:



(b) Mit Pythagoras ist die Seitenlänge des Achtecks $s = \sqrt{(1 - 1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Die Fläche des Achtecks ist daher $4 \cdot 1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (siehe unten). Die Fläche aller acht Halbkreise ist $4\pi \cdot (s/2)^2 = \pi(2 - \sqrt{2})$ und die Fläche des Umkreises ist π. Somit folgt die Fläche der blauen Sicheln als $2\sqrt{2} + \pi(2 - \sqrt{2}) - \pi = \pi + (2 - \pi)\sqrt{2}$.