Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

Interessante Folgen

1. $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$
2. Konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
3. Alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$
4. Geometrische Folge $((1/2)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \ldots)$

Konvergenz

Definition (Grenzwert (Limes), Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **kovergent gegen** a, und wir schreiben

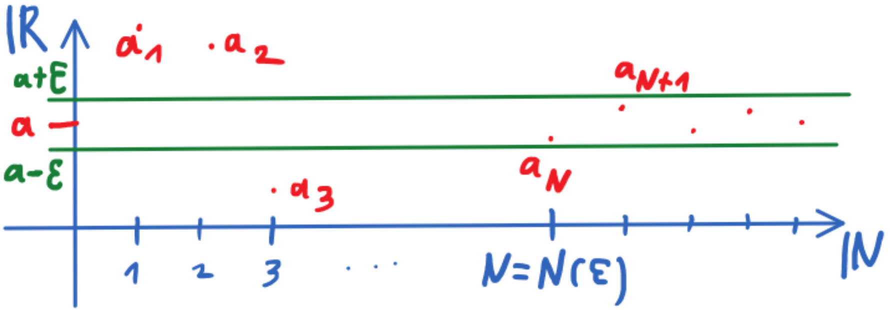
$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt **Nullfolge**.
Existiert keine solche Zahl a, so heißt die Folge **divergent**.

Für eine konvergente Folge ist der Grenzwert eindeutig!

Es gilt nach Definition die Äquivalenz: $\quad a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| \to 0.$

Konvergenz Skizze Grenzwert



Skizze Definition Grenzwert: Ab einem Index $N = N(\varepsilon)$ gilt stets

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Wichtige Konvergenzen

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{R}$ ist konvergent gegen a.
- **($1/n \to 0$)**: Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge: Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$.

  $0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

  Also folgt auch $n \geq N \geq 1 \quad \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$.

  Somit erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1/n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Das ist nach Definition gerade die Konvergenz $1/n \to 0$.

Limes-Ungleichung

Gilt für reelle Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$ sowie

$$a_n \leq b_n$$

für unendlich viele n, dann ist auch $a \leq b$.

- **Beachte:** Aus $a_n < b_n$ folgt im Limes nicht $a < b$!
  Beispiel: Für die Folgen $a_n = -1/n < 1/n = b_n$ ist $a_n \to 0 = 0 \leftarrow b_n$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n^2 \leq n^3 \leq \cdots$, also folgt für $n \to \infty$ auch

$$0 < \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} \to 0, \quad \frac{1}{n^3} \to 0$$

Wichtige Konvergenzen

- **Geometrische Folge: $z^n \to 0$ für $|z| < 1$:** Für jedes $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < 1$ ist $a_n = z^n$ eine Nullfolge:

  Für $z = 0$ ist es die konstante Nullfolge.

  Ansonsten ist für die Wahl

  $$x := \frac{1 - |z|}{|z|} > 0 \quad \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{1 + x}$$

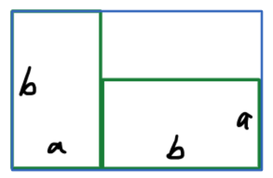
  mit $(1 + x)^n = 1 + nx + \cdots \geq 1 + nx$ für $x > 0$, Limes-Ungleichung und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$:

  $$0 < |z^n| = |z|^n = \frac{1}{(1 + x)^n} \leq \frac{1}{1 + nx} < \frac{1}{nx} \to 0.$$

Knobelaufgabe

Folge von Rechtecken

Wähle beliebige natürliche Zahlen $a < b$. Das sind die Seiten des ersten Rechtecks. Jedes neue Rechteck (wir bezeichnen erneut die Seiten $a < b$) enthält das vorherige Rechteck zweimal in der Form:



Was beobachtest du für b/a für die Folge der Rechtecke?

Eine Folge ist

$$27/3,\ 10/9,\ 19/10,\ 29/19,\ 48/29 \approx 1.65,\ 77/48 \approx 1.60,\ 125/77 \approx 1.62$$

Wir bezeichnen Quotienten des n-ten Rechtecks

$q_n = \frac{b_n}{a_n}$. $q_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{b}{a}$. Mit Rekursion Rechtecke:

$q_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + 1 = \frac{1}{q_n} + 1$ Rekursion

Vermutung: $q_n \to \varphi \approx 1.61$ (Goldener Schnitt) für $n \to \infty$?

Zuerst: Falls eine Konvergenz $q_n \to c > 0$ vorliegt?

Rekursion $\Rightarrow$ $c \leftarrow q_{n+1} = \frac{1}{q_n} + 1 \to \frac{1}{c} + 1 \iff c = \frac{1}{c} + 1$

$\iff c^2 = 1 + c \iff c^2 - c - 1 = 0$ Lösungen $c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (!) , $c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \approx -0.61$

Also nur möglich, da $q_n > 1$: $q_n \to \varphi$ für $n \to \infty$

Nun beweisen wir tatsächlich $q_n \to \varphi$.

Wir wissen bisher: (1) $b_n > a_n \Rightarrow q_n = \frac{b_n}{a_n} > 1 \Rightarrow \frac{1}{q_n} < 1$

(2) $q_{n+1} = \frac{1}{q_n} + 1$ und $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$

Mit Bruchrechnen, (1), (2) folgt:

$$|q_{n+1} - \varphi| = \left|\left(\frac{1}{q_n} + 1\right) - \left(\frac{1}{\varphi} + 1\right)\right| = \left|\frac{1}{q_n} - \frac{1}{\varphi}\right| = \left|\frac{\varphi - q_n}{q_n \varphi}\right|$$

$$= \frac{1}{q_n} \cdot \frac{1}{\varphi} |q_n - \varphi| < \frac{1}{\varphi} |q_n - \varphi|$$ (Abstände werden kleiner!)

Analog (Iteration):

$$|q_n - \varphi| < \frac{1}{\varphi} |q_{n-1} - \varphi| < \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 |q_{n-2} - \varphi| < \dots < \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |q_0 - \varphi|$$

Mit $\frac{1}{\varphi} = 0.61$ ist $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$

Also ist $|q_n - \varphi| \to 0 \Rightarrow q_n \to \varphi$

Ausblick

- **23.12:** Mathe-AG entfällt!

  Schöne Weihnachtsferien!

- **13.01.23** Mathe-AG ist zurück!
  - Knobelaufgaben, Spaß mit Geometrie

  weitere Themen im Januar/Februar:

  interessante Konvergenzen, Begriffe für Primzahlsatz