Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

Mathe-AG Uni Mannheim

- Multimengen
- Anzahlen von Abbildungen
- Eine neue Formel für Stirling-Zahlen
- Knobelaufgaben

Multimengen

Wir setzen unser Studium der Kombinatorik fort (siehe Folien 10).

Eine **Multimenge** darf identische Elemente enthalten. Die **Mächtigkeit** einer Multimenge ist die Summe aller Vielfachheiten aller Elemente. Eine k-**Multimenge** über eine n-Menge ist eine Multimenge mit der Mächtigkeit k mit Elementen aus einer Menge mit n Elementen.

Beispiele:

- In der Multimenge $\{1, 1, \pi\}$ hat das Element 1 die Vielfachheit 2 und das Element π die Vielfachheit 1.
- $\{2, 2, 2, 2, 4\}$ ist eine 4-Multimenge über der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ mit der Mächtigkeit 5.

Anzahl der k-Multimengen

Satz

Die Anzahl aller k-Multimengen über eine n-Menge ist $\dfrac{n^{\overline{k}}}{k!}$.

Beweis durch Bijektion.

Für die Menge A aller k-Multimengen über $\{1, 2, \ldots, n\}$ und die Menge B aller k-Teilmengen von $\{n, n+1, \ldots, n+k-1\}$ sind die Abbildungen
$f : A \to B,\ \{a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k\} \mapsto \{a_1, a_2+1, a_3+2, \ldots, a_k+(k-1)\}$,
$g : B \to A,\ \{b_1 < b_2 < \ldots < b_k\} \mapsto \{b_1 \leq b_2 - 1 \leq b_3 - 2 \leq \cdots \leq b_k - (k-1)\}$
beide wohldefiniert und invers zueinander. Damit sind beide f und g Bijektionen und nach Abzählregel mittels Bijektion ist $|A| = |B| = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$. $\square$

Anzahlen von Abbildungen

Für endliche Mengen A und B definieren wir:

- $Abb(A, B)$: die Menge aller Abbildungen $f : A \to B$
- $Inj(A, B)$: die Menge aller injektiven Abbildungen $f : A \to B$ (dann ist notwendig $|A| \leq |B|$)
- $Surj(A, B)$: die Menge aller surjektiven Abbildungen $f : A \to B$ (dann ist notwendig $|A| \geq |B|$)

Für endliche Mengen A und B mit den Anzahlen $|A| = a$ und $|B| = b$ gilt:

- Nach Produktregel ist: $|Abb(A, B)| = b^a$.
- Nach Produktregel ist: $|Inj(A, B)| = b^{\underline{a}}$
- Mit Wohldefiniertheit einer Funktion ist jede Funktion $f : A \to B$ surjektiv auf das Bild $f(A) \subseteq B$
- Für surjektive Abbildung f ist die Menge der Urbilder eine geordnete Mengen-Partition, also gilt:
- $|Surj(A, B)| = b! S_{a,b}$

Anzahlen von Abbildungen

Mittels Summation über alle verschiedenen Bilder $f(A) \subseteq B$ und den obigen Resultaten erhalten wir:

$$\begin{aligned} b^a &= |Abb(A,B)| \\ &= \sum_{\emptyset C \subseteq B} |Surj(A,C)| = \sum_{\emptyset C \subseteq B} |C|! S_{a,|C|} \\ &= \sum_{k=1}^{b} \sum_{C \subseteq B, |C|=k} k! S_{a,k} = \sum_{k=1}^{b} \binom{b}{k} k! S_{a,k}. \end{aligned}$$

Damit können wir nun aus den einfachen Stirling-Zahlen $S_{n,1} = 1, S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ beispielsweise weitere Stirling-Zahlen bestimmen, juchu :-)

(Themen werden fortgesetzt und dabei wie immer wiederholt ...)

Knobelaufgaben

(a) Es sind $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen S_i gegeben. Die erste habe a_1 Elemente, die zweite a_2, usf. Zeige, dass die Anzahl der Mengen, die höchstens ein Element aus jedem S_i enthalten, gleich $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$ ist.

Seien die Primzahlen aufsteigend $(p_1, p_2, \ldots) = (2, 3, \ldots)$ und $t(n)$ die Anzahl der Teiler der Zahl n (siehe Auszug ab Seite 5).

(b) Wende das Ergebnis (a) auf folgendes zahlentheoretische Problem an: Sei $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $k \geq 1$, die Primfaktorzerlegung von n. Dann hat n genau $t(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ Teiler. Folgere daraus, dass n genau dann eine Quadratzahl ist, wenn $t(n)$ ungerade ist.

Knobelaufgaben

Beweise (z.B. mittels der Summenregel für Abzählen):

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Finde und beweise eine explizite Formel für

$$(n-1)1 + (n-2)2 + (n-3)2^2 + \cdots + (n-n)2^{n-1}$$