Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

Mathe-AG Uni Mannheim

- Wiederholung Zählprinzipien
- Teilmengen und Partitionen
- Binomialkoeffizient, Stirling-Zahl zweiter Art
- Mengen-Partition und Zahl-Partition
- Anzahl aller ungeordneten und geordneten Teilmengen und Partitionen

Wiederholung Zählprinzipien

Begriffe Mengen und Bijektion siehe Folien 9.
Für Mengen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ heißen:

- Anzahl Elemente einer endlichen Menge S: $|S|$
- **Summenregel**: Für disjunkte Mengen (d.h. mit leeren Durchschnitt):

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n|$$

- **Produktregel**: Für beliebige Mengen gilt:

$$|S_1 \times S_2 \times S_3 \cdots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n|$$

- **Bijektion/Gleichheit**: Existiert eine Bijektion $f : S_1 \to S_2$, dann gilt

$$|S_1| = |S_2|.$$

(Bijektion: jedes Element in S_2 hat genau ein Urbild in S_1, d.h. f ist umkehrbar zu einer (bijektiven) Abbildung $f^{-1} : S_2 \to S_1$)

Teilmengen und Partitionen

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Für die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ heißt $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen, kurz k-Teilmengen, **Binomialkoeffizient**. Für die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ heißt eine Zerlegung in k disjunkte (also auch nichtleere!) Mengen oder Blöcke eine **Mengen-Partition**, kurz k-Partition. Die Anzahl der k-Partitionen $S_{n,k}$ heißt **Stirling-Zahl zweiter Art**.

Beispiele:

- Für Menge $\{1, 2, 3\}$ sind alle 2-elementigen Teilmengen $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}$ und $\binom{3}{2} = 3$
- Die Menge $\{4, Max, \pi, Olaf\}$ hat genau $\binom{4}{3}$ 3-elementige Teilmengen
- Zwei 2-Partitionen von $\{4, Max, \pi, Olaf\}$ sind

$$\{\{Max, Olaf\}, \{4, \pi\}\}, \quad \{\{Olaf, \pi\}, \{4, \max\}\}$$

- Alle 2-Partitionen von $\{1, 2, 3\}$ sind und daher $S_{3,2} = 3$:

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \ \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \ \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

Partitionen

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Zerlegung als Summe von k natürlichen Zahlen

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

eine **Zahl-Partition**, kurz k-Partition. Die Anzahl aller k-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ sei $P_{n,k}$. Es kann O.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ angenommen werden.

- Für $n = 4$ sind alle 2-Partitionen: $2 + 2, \quad 3 + 1 \;\Rightarrow P_{4,2} = 2$
- Mengen-Partitionen und Zahl-Partitionen sind also ungeordnet. Anzahl aller **geordneten** Partitionen klar höher.
- Zwei geordnete Partitionen von $\{1, 2, 3\}$: $(\{1\}, \{2, 3\}),\ (\{2, 1\}, \{3\})$
- Alle geordneten 2-Partitionen von $n = 4$: $3 + 1, \quad 1 + 3, \quad 2 + 2$
- Anzahl geordneter k-Teilmengen: $k!\binom{n}{k}$ (Umordnung der Elemente)
- Anzahl geordneter k-Mengen-Partitionen: $k!S_{n,k}$ (Umordnung der Blöcke)

Permutationen und Faktorielle

Die Anzahl der Permutationen (Umordungen) von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Für eine Menge S nennen wir k-**Permutationen** Wörter mit k verschiedenen Elementen aus S.

Beispiele:

- Für $\{1, 2, \ldots, 9\}$ sind zwei 3-Permutationen: $153, 296$
- Für die Menge $\{Max, \pi, 4\}$ sind zwei 2-Permutationen $Max, 4$, $4, \pi$

Für $n, k \in \mathbb{N}$ heißen $n^{\underline{k}} := n(n-1) \cdots (n-k+1)$ der **fallende Faktorielle** und $n^{\overline{k}} := n(n+1) \cdots (n+k-1)$ der **steigende Faktorielle**.

Anzahl der geordneten k-Teilmengen ist zugleich die Anzahl der k-Permutationen:

$$k! \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Geordnete k-Zahl-Partitionen

Satz

Die Anzahl aller geordneten k-Zahl-Partitionen ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Beweis durch Bijektion.

Für die Menge A aller geordneten k-Zahl-Partitionen $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ von n und die Menge B aller $k-1$-Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ sind die Abbildungen
$f : A \to B,\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k \mapsto \{n_1, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, \ldots, n_1 + \cdots n_{k-1}\}$,
$g : B \to A,\ \{m_1, \ldots, m_{k-1}\} \mapsto m_1 + (m_2 - m_1) + \cdots + (m_{k-1} - m_{k-2}) + (n - m_{k-1})$
beide wohldefiniert und invers zueinander (d.h. es gilt stets
$g(f(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ und
$f(g(\{m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}\})) = \{m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}\}$). Damit sind beide f und g Bijektionen und nach Abzählregel mittels Bijektion ist $|A| = |B| = \binom{n-1}{k-1}$.

$\square$