Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

- Mengen, Funktionen
- injektiv, surjektiv und bijektiiv (eine Bijektion)
- Mächtigkeit (unendliche Mengen)
- Satz von Cantor-Schröder-Bernstein
- Kombinatorik Auszug Abschnitt 1.1:
- Im Durchschnitt wächst die Anzahl der Teiler einer Zahl n wie $\log(n)$

Mengen

Zuerst ein Exkurs zu Mengen und Mächtigkeit:

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M

Definition einer Menge oftmals mittels einer Aussage als Bedingung (**geschweiften Klammern!**):

$$M := \{x : p(x)\} \text{ bzw. } M := \{x \mid p(x)\}$$

(d.h. Menge der x, für die z.B. eine Formel oder Ungleichung $p(x)$ gilt)

Mengen Beispiele:

- $\{1, 2, 3, 5\}$, natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\{Max, \pi, Olaf\}$

Mengen

Relationen und Definitionen für Mengen:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow$ Für alle $x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow (A \subseteq B)$ und $(B \subseteq A)$	**Gleichheit**
$A \cup B := \{x : x \in A$ oder $x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A$ und $x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**
$A \setminus B := \{x : x \in A$ und $x \notin B\}$	**Komplement** von B in A

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
- $\{1, 2\} \cap \{0, 1, 5\} = \{1\}$, $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$

Mengen

Beachte den Unterschied:

Menge $\{\ldots\}$	Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
Tupel/Vektor $(\ldots)$	Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

- $\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{3,2,1\}$ ist eine (!) Menge
- $(1,2,3) \neq (2,3,1) \neq (3,2,1)$ sind drei verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Zwei oder mehrere Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mit leeren Durchschnitt heißen **disjunkt**.

Funktionen und Bijektion

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B, \;\; a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $f(a) \in B$ zu.
Unter einer **Funktion** (Abbildung) $f : A \to B$ für Mengen A, B versteht man also eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$.
Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b. Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich/-menge** und A *Definitionsbereich/-menge* von f.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(A) = B$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A, \;\; y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** f.

Mächtigkeiten

Die Mengen X und Y heißen

gleichmächtig $(X \sim Y)$ $:\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Fkt. $f : X \to Y$

Die Menge M heißt:

- **endlich** $:\Leftrightarrow$ es existiert $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : M \to \{1, 2, \ldots, n\}$
- **abzählbar** $:\Leftrightarrow M \sim \mathbb{N}$
- **höchstens abzählbar** $:\Leftrightarrow M$ ist endlich oder abzählbar
- **überabzählbar** $:\Leftrightarrow M$ ist nicht abzählbar

Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente (sofern M endlich), ansonsten nur Vergleichbarkeit (z.B. $|M| \geq |\mathbb{N}|$)

- Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind abzählbar unendlich
- Jede Menge, die eine unendliche Menge als Teilmenge enthält, ist unendlich

Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

Seien zwei Mengen A und B und zwei injektive Abbildungen $T : A \to B$, $S : B \to A$, dann gilt $|A| = |B|$.

(Eleganter) Beweis.

Wegen Injektivität und Eindeutigkeit der Funktionen sind alle (beliebigen) Elemente $a \in A$ und $b \in B$ in genau einer der Bahnen enthalten, alle verschieden, wenn kein Index. Alle Bahnen sind vorwärts unendlich:

1. $b \mapsto a \mapsto b \mapsto \cdots$ (erstes Element ohne Urbild)
2. $a \mapsto b \mapsto a \mapsto \cdots$ (erstes Element ohne Urbild)
3. $a_1 \mapsto b_1 \mapsto \cdots \mapsto a_1$ (eine endliche periodische Bahn)
4. $\cdots b \mapsto a \mapsto b \mapsto \cdots$ (unendliche Bahn, alle Elemente mit Urbild)

Dann ist die gesuchte Bijektion für $|A| = |B|$ (man überzeuge sich von Injektivität und Surjektivität):

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto \begin{cases} T(a), & a \text{ in Bahn von Typ (2) - (4)} \\ S^{-1}(a), & a \text{ in Bahn von Typ (1)} \end{cases}$$

$\square$

Kombinatorik

Wi habe zudem weiter den Auszug zur Kombinatorik studiert (aus AIGNER: Diskrete Mathematik). Wir haben Abschnitt 1.1 studiert und gelernt:

- Anzahl Elemente einer endlichen Menge S: $|S|$
- Wichtige Regeln zum Abzählen von endlichen Mengen $S_1, S_2, S_3, \ldots,$:
- **Summenregel**: Für disjunkte Mengen (d.h. leeren Durchschnitt) gilt

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n|$$

- **Produktregel**: Für beliebige Mengen gilt

$$|S_1 \times S_2 \times S_3 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n|$$

- Inzdenzsystem (siehe Auszug)
- **Regel vom zweifachen Abzählen** (siehe Auszug)

Kombinatorik

Damit haben wir ein interessantes Beispiel untersucht:

- Sei $t(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n
- Für die Exponentialfunktion e^x ($e \approx 2.718$) ist die Umkehrfunktion der natürliche Logarithmus $\log(x)$
- (Plots selber untersuchen, z.B. in `www.desmos.com`)
- Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind asymptotisch gleich $a_n \sim b_n$, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$
- Mit Regel vom zweifachen Abzählen (und Asymptotik aus Analysis),

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log(n)$$

folgt (siehe Auszug):

- Im Durchschnitt wächst die Funktion $t(n)$ wie $\log(n)$ (wow!)