Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

Mathe-AG Uni Mannheim

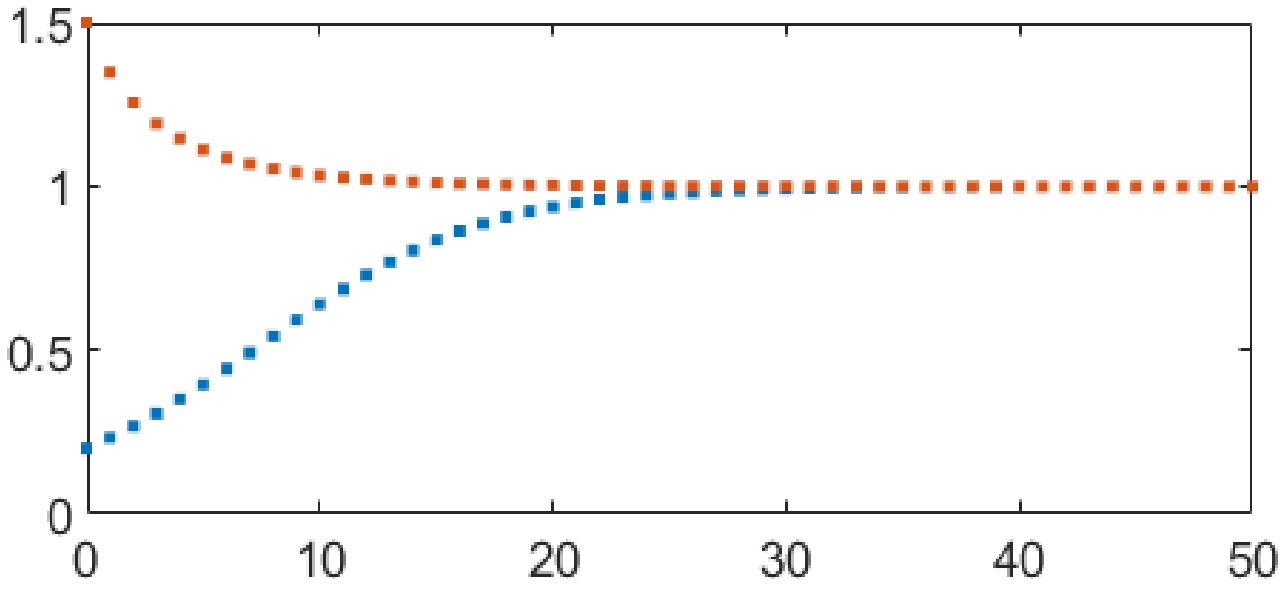
- Exkurs Logistische Differentialgleichung
- Exkurs Konvergenz und Limesregeln
- Exkurs Differentiation und Differentiationsregeln
- Exkurs Logistische Rekursion
- Kombinatorik: Summenregel und Produktregel
- Abzählen: Anzahl der Umordnungen
- Abzählen: Anzahl der k-elementigen Teilmengen

Exkurs Logistische Rekursion

Die logistische Rekursion mit Wachstumsrate $c > 0$, Sättigung $s > 0$ und Startwert $b_0 > 0$ ist gegeben durch

$$b_{n+1} = b_n + cb_n(s - b_n) \tag{1}$$

Beispiel für $c = 0.2$, $s = 1$ und die Startwerte $b_0 = 0.2$ (blau) und $b_0 = 1.5$ (rot):



Exkurs Logistische Rekursion

Die logistische Rekursion ist die diskrete Version der logistischen Differentialgleichung mit Startwert $y(0) = y_0 > 0$

$$y'(t) = cy(t)(s - y(t)). \tag{2}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{s}{1 + e^{-cst}(s/y_0 - 1)}.$$

Nachweis durch Differentiation (Differentiationsregeln, insbesondere Quotientenregel)

- Exkurs Konvergenz und Differentiation
- Exkurs Limesregeln und Differentiationsregeln

  (wird alles in Mathe-AG 2024 noch ausführlicher thematisiert)

Exkurs Logistische Rekursion

- Im Allgemeinen ist die Lösung einer Differentialgleichung (DGL) der Form $y'(t) = F(y(t))$ nicht explizit bekannt
- Im Allgemeinen kann man numerische Verfahren verwenden
- Ein elementares numerisches Verfahren ist das Euler-Verfahren für da Intervall $[0, T]$, $T > 0$ und die Diskretisierung $n \in \mathbb{N}$ sowie die Schrittweite $\Delta = T/n$:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta F(y_n)$$

- Das Euler-Verfahren für die logistische DGL (2) ergibt gerade die logistische Rekursion (1) (mit passenden Parameter in Abhängigkeit von T, n)

Kombinatorik (Ziel Aufgabe TDM Folien 3)

- Abzählen Studium des Auszugs zur Kombinatorik
- Mengen Grundlagen siehe Folien 4
- Für endliche Menge M ist $|M|$ die Anzahl der Elemente von M
- Anzahl Umordnungen von $(1, 2, \ldots, n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$
- Zwei oder mehr Mengen heißen **disjunkt**, falls sie keine gemeinsamen Elemente haben, d.h. alle Durchschnitte sind leer
- **Summenregel**: Für disjunkte Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ist für die Vereinigung
$$|\bigcup_{i=1}^{n} S_i| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$$
- **Produkregel**: Für beliebige Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ist für das kartesische Produkt
$$|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$$