Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

Mathe-AG Uni Mannheim

- Kleine Wiederholung Abzählen
- TDM 2023 - Aufgabe 3
- Abzählen von Lagen und Figuren
- Symmetrien abzählen

Abzählen

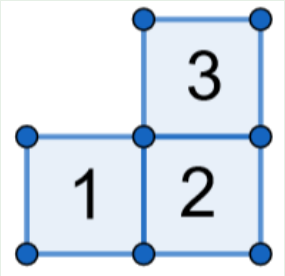
- **Summe** $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdots a_n$.
- Für endliche Menge M bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente.**
- Zwei Mengen M, N heißen **disjunkt**, falls $M \cap N = \emptyset$
- **Summenregel:** Für disjunkte Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$
- **Produktregel:** Für beliebige Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$
- Anzahl der k-**Tupel** in der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist: n^k (Produktregel)

Abzählen

- Anzahl Anordnungen/Permutationen von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n! := n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$
- Anzahl der k-Tupel ohne Wiederholung: $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{k!}$
- Anzahl der k-elementigen Teilmengen (für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$) in der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Für endliche Mengen A, B und die Menge aller Abbildungen $\{f : A \to B\} =: B^A$ ist daher $|B^A| = |B|^{|A|}$
- Anzahl aller Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist 2^n

TDM 2023 Aufgabe 3

Seien $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ verschiedene quadratische Spielsteine. Eine **Figur** besteht aus Spielsteinen in der Ebene, die sich nur und genau an den Kanten berühren. Dabei sind zwei Figuren identisch, wenn sie durch Drehen oder Wenden ineinander übergehen. Ein Beispiel einer Figur für $n = 3$:



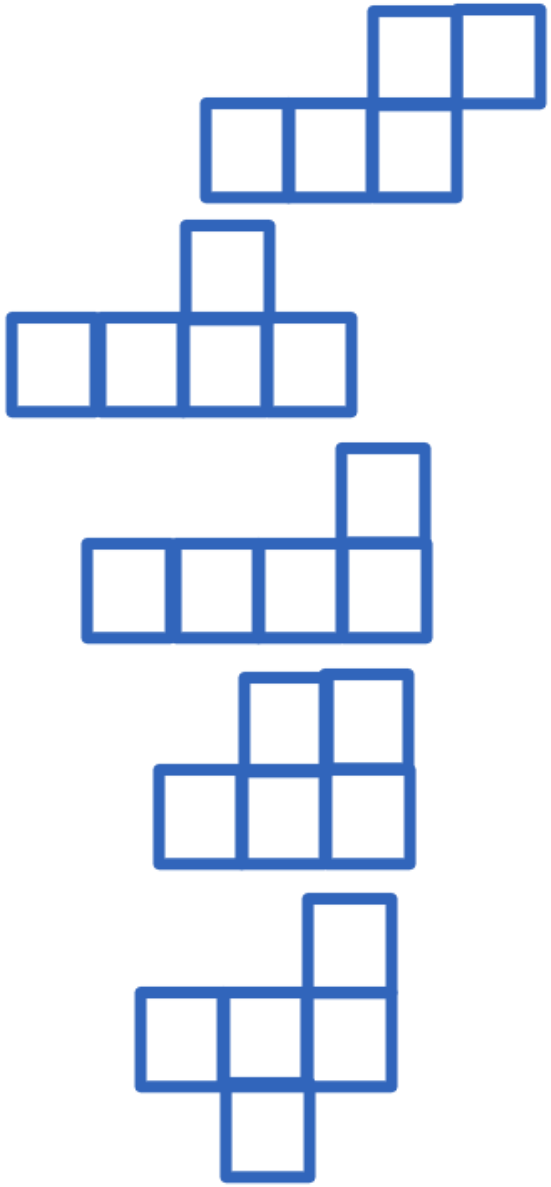
1. Bestimme die Anzahl der Figuren für $n = 2$ und $n = 3$.
2. Bestimme die Anzahl der Figuren für $n = 4$.
3. Bestimme die Anzahl der Figuren für $n = 5$. (Zusatzpunkte)

Mathe-AG Uni Mannheim

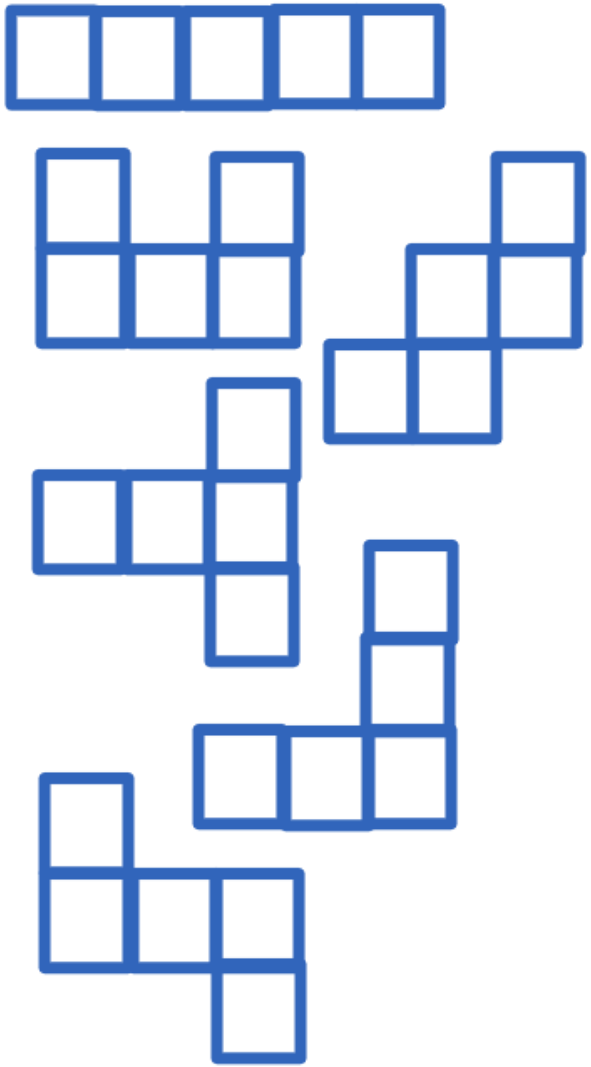
- Sei Anzahl a_n der Figuren bei $n \in \mathbb{N}$ Spielsteinen
- Klar ist $a_2 = 1$.
- Für $n = 3$ gibt es zwei verschiedene Lagen (Reihe oder Ecke). Wegen Symmetrie ist $a_3 = 6$
- Für $n = 4$ zählen wir zuerst alle möglichen Lagen: es gibt fünf.
- Die Lage der Form L hat keine Symmetrie. Das Quadrat hat viele verschiedene Symmetrien: Achsensymmetrien und Punktsymmetrie durch Zentrum. Es genügen drei Symmetrien, um alle zu erzeugen.
- Alle anderen drei Lagen haben genau eine Symmetrie.
- Dies ergibt $a_4 = 4! + 3 \cdot 4!/2 + 4!/2^3 = 63$
- Für $n = 5$ gibt es 12 verschiedene Lagen
- Fünf Lagen haben keine Symmetrien (z.B. Lage der Form L)
- Sechs Lagen haben genau eine Symmetrie
- Das Kreuz aus fünf Steinen hat erneut drei Symmetrien, die alle anderen erzeugen:

Mathe-AG Uni Mannheim

Keine Symmetrie bei:



Eine Symmetrie bei:



Drei Symmetrien:

- Dies ergibt $a_5 = 5 \cdot 5! + 6 \cdot 5!/2 + 5!/2^3 = 975$
- Recherche nach dieser Folge in mathematischer Datenbank für Folgen:

  `https://oeis.org/`
- Suche ergibt: nix! :-(
- Sicherlich ist diese Folge aber schon irgendwo in irgendeiner Arbeit untersucht worden!

  ... Thema wird fortgesetzt!
- Aufgrund der Aufgaben vom TDM 2023 wollen wir in der Mathe-AG etwas genauer in die Theorie Abzählen von Mustern einsteigen...