Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

Mathe-AG Uni Mannheim

- Ein paar Grundbegriffe der Mathematik:
- Aussagen, Mengen, Funktionen
- Folgen
- Beispiele für Folgen
- Aufgaben zu Folgen und Abzählen

Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist).

Aussagenoperationen für Aussagen A und B:

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B, **Implikation**)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (**Äquivalenz**)

Ein **mathematischer Satz** ist eine **Implikation oder Äquivalenz**, die zu beweisen ist.
Zu einem mathematischen Satz gehört immer auch ein Beweis.

Mengen

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**). Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert.

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die **Elementbeziehung** wird geschrieben als:

$x \in M$ bedeutet: x ist Element der Menge M

$x \notin M$ bedeutet: x ist nicht Element der Menge M

Mengen werden mit **geschweiften Klammern** geschrieben:

$M := \{x : p(x)\}$ bzw. $M := \{x \mid p(x)\}$ (d.h. Menge der x, für die $p(x)$ gilt)

Beachte den Unterschied geschweifte und runde Klammer!

Menge $\{\ldots\}$	Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
Tupel/Vektor $(\ldots)$	Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

Mengen

Relationen und Definitionen für Mengen M und N:

$M \subseteq N :\Leftrightarrow$ Für alle $x : x \in M \Rightarrow x \in N$	**Teilmenge**
$M = N :\Leftrightarrow (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M)$	**Gleichheit** (für Mengen!)
$M \subset N$ $(M \subsetneq N) :\Leftrightarrow (M \subseteq N) \wedge (M \neq N)$	**echte Teilmenge**
$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$	**Vereinigung**
$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$	**Durchschnitt**
$M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$	**Komplement** von N in M
$M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$	**kartesisches Produkt**

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
- $\{1, 2\} \cap \{0, 1, 5\} = \{1\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$

Mengen

Seien die Mengen

$$A := \{1,2\},\ B := \{\{1\},\{2\}\},\ C := \{1,\{1,2\}\},\ D := \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

Ist die folgende Aussage jeweils wahr oder falsch?

- $A = B$
- $A \in C$
- $A \subseteq C$
- $B \in D$
- $B = D \setminus \{1,2\}$
- $\{A\} \in D$
- $A \cap D = \{\emptyset\}$
- $A \cup B \cup C \cup D \in \mathbb{N}$
- $B \cap C = A \setminus \{2\}$

Mengen

Wichtige Zahlenmengen:

- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen : $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$
- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{N}$ **mit Null** $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl).

Funktionen

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B, \ a \mapsto f(a) \qquad (f \text{ von } A \text{ nach } B)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ **eindeutig** ein $f(a) = b \in B$ zu.
Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b.

Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)
- **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \ x \mapsto \sqrt{x}$
- **Anzahl Elemente**:
  $|\cdot| \ : \{M \subset \mathbb{R} : M \text{ endlich}\} \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, M \to |M|$

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als: $(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$. Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

Beispiele für Folgen sind:

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (andere **Indexmengen** möglich)
- Für eine endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist $(f_i)_{i\in I}$ eine endliche Folge

  Folge kann auch **rekursive Vorschrift (Rekursion)** sein:
- $a_0 = 2$ und $a_{n+1} = 2a_n - 3$: $(a_n)_{n\geq 0} = (2, 1, -1, -5, \ldots)$
- **Fibonacci-Folge**: $f_0 = f_1 = 1$ und für alle $n \geq 1$ ist $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

Knobelaufgaben

Sei M eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Potenzmenge und beweise die Formel.

Bestimme die Anzahl aller **Umordngungen (Permutationen)** der Zahlen $(1, 2, \ldots, n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Bestimme die Anzahl der Permutationen f von $(1, 2, \ldots, n)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $|f(k) - k| \leq 1$.

1	2	$\cdots$	$n-1$	n

Bestimme die gesuchte Anzahl für $n = 11$.

Bestimme die Anzahl der Umordnungen f von einer Kette aus $n \in \mathbb{N}$ (verschiedenen) Perlen $1, 2, \ldots, n$ mit $|f(k) - k| \leq 1$.
Bestimme die gesuchte Anzahl für eine Kette aus 7 Perlen.