Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

- Kleine Wiederholung AM-GM-Ungleichung: Beweis durch Induktion
- TDM 2023 - Aufgabe 1 Knobeleien:
- Verallgemeinerung mit n-Ecken
- a_n sei Anzahl der Muster für n-Eck
- Kleine Erkenntnisse: Anzahl der Muster mit $0, 1, 2, 3$ Perlen
- Die ersten Werte $a_3, \ldots, a_8$
- Recherche nach Folgen mit diesen Werten

AM-GM-Ungleichung durch Induktion - Hauptidee

- Für Zweierpotenzen folgt die AM-GM-Ungleichung durch mehrfache Anwendung (eine Induktion) der elementaren AM-GM-Ungleichung $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$:

$$(a_1 a_2 \cdots a_{2^k})^{1/2^k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}. \tag{1}$$

- Es fehlt also nur noch der Beweis für $n \notin \{2^k, k \in \mathbb{N}\}$.
- Für jedes solche n gibt es eine nächstgrößere Zweierpotenz $n < 2^k$
- Wir füllen die Folge zu einer Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^k}$ (der Länge 2^k) auf mit $\alpha_i = a_i$ für $i \leq n$ und für $n < i \leq 2^k$:

$$\alpha_i = A := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Anwendung der bereits bewiesenen AM-GM-Ungleichung (1) ergibt:

$$\left(a_1 \cdots a_n A^{2^k - n}\right)^{1/2^k} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n + (2^k - n)A}{2^k} = \frac{2^k A}{2^k} = A.$$

- Umformen ergibt die gesuchte AM-GM-Ungleichung für $n < 2^k$.

TDM 2023 Aufgabe 1 (a)

Bäuerin Berta hat sich eine einfache Methode ausgedacht, ihre verschiedenen Ziegen zu kennzeichnen: Am Halsband baumelt ein Drahtquadrat, dessen vier Kanten jeweils genau in der Mitte entweder mit oder ohne einer glitzernden Perle versehen sind. Die **Muster** von Perlen sind gleich, wenn sie durch Drehen oder Wenden des Quadrates ineinander übergehen. Beweise und begründe:

a. Bäuerin Berta kann höchstens sechs verschiedenen Ziegenrassen kennzeichnen, d.h. es gibt genau sechs verschiedene Muster.

- Wir betrachten die **Verallgemeinerung auf Drahtvielecke**:
- Sei a_n die Anzahl der Muster für n-Eck
- Wir ermittelten in der Mathe-AG:

$$a_3 = 4, \;\; a_4 = 6, \;\; a_5 = 8, \;\; a_6 = 13$$

- Allgemein gilt für n-Eck:
- Anzahl der Muster mit genau 0 oder n Perlen ist stets 1
- Anzahl der Muster mit genau 1 oder $n-1$ Perlen ist stets 1 (Symmetrie !)
- Ab $n \geq 4$ ist:
- Anzahl der Muster mit genau 2 oder $n-2$ Perlen ist stets $\lfloor n/2 \rfloor$
  $\lfloor x \rfloor$ ist Abrunden auf die nächstkleinere ganze Zahl von $x \in \mathbb{R}$
  $\lceil x \rceil$ ist Aufrunden auf die nächstgrößere ganze Zahl von $x \in \mathbb{R}$
- Für $6 \leq n \leq 8$ ist:
- Anzahl der Muster mit genau 3 oder $n-3$ Perlen ist stets $n-3$
- das haben wir entdeckt durch Abzählen aller kleinsten Lücken zwischen den drei Perlen. Damit folgt allgemein für alle $n \geq 6$:
- Vermutung für Anzahl der Muster mit genau 3 oder $n-3$:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left(\lceil (n-k)/2 \rceil - k \right)$$

- Wir erhalten damit und mittels Untersuchung aller Fälle:

$$(a_3, \ldots, a_8) = (4, 6, 8, 13, 18, 30)$$

- Recherche nach dieser Folge in mathematischer Datenbank für Folgen: `https://oeis.org/`
- Suche ergab Treffer für die häufigste Interpretation der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Anzahl der Färbungen einer Perlenkette mit n Perlen mittels zwei Farben
- Das ist exakt unser Problem
- Jetzt haben wir eine Idee, mit welchen Begriffen in der Kombinatorik das zu tun hat ... :-) $\rightsquigarrow$ Abzählen von Mustern mit Symmetrien

  ... Thema wird fortgesetzt!