# Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2023/2024

Peter Parczewski

# Mathe-AG Uni Mannheim

- TDM 2023 - Aufgabe 2 Knobeleien:
- Arithmetisches Mittel (AM), harmonisches Mittel (HM), geometrisches Mittel (GM)
- AM-GM-Ungleichung: für alle $a, b > 0$ gilt $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$
- Verschiedene Beweise: Mittels **wichtigster Ungleichung der Mathematik:** $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)
- Mittels Thales-Halbkreis, mittels Matten
- Allgemeine AM-GM-Ungleichung - mit Induktion? eher schwierig
- Genialer Beweis von George Pólya
- Anekdoten über George Pólya, John von Neumann und die *Marsianer* beim Manhattan Projekt

Seien beliebige $x, y, z > 0$. Beweise

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{1/x + 1/y + 1/z}. \tag{1}$$

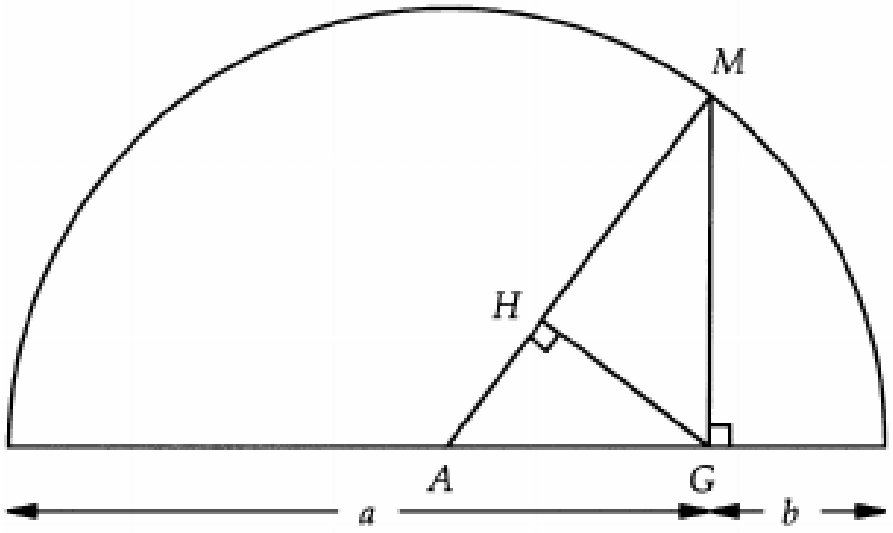
- Exkurs: Links steht arithmetisches Mittel, rechts auch ein Mittel?
- Welche Mittel kennen wir sonst?
- geometrisches Mittel von $a, b > 0$ ist $\sqrt{ab}$ (Seite des Quadrates der Fläche des Rechtecks $ab$)
- Zusammenhang mit arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ ?

Für alle $a, b > 0$ gilt $\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$ (AM-GM-Ungleichung)

- Beweise?
- Nachrechnen mittels wichtigster Ungleichung im Universum:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$

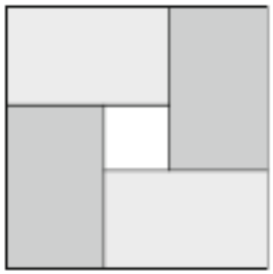
- Mit $(a-b)^2 \geq 0$ folgt AM-GM-Ungleichung, juchu!
- Alternative Beweise AM-GM-Ungleichung?
- Geometrisch im Thales-Halbkreis:




- AM ist $(a+b)/2$
- Beweis für Höhe im Dreieck ist GM $\sqrt{ab}$ mittels Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke, juchu!
- Aus dem Halbkreis folgt AM-GM-Ungleichung, juchu!

# Mathe-AG Uni Mannheim

- Alternative Beweise AM-GM-Ungleichung?
- Mittels Matten mit den Seiten $a, b > 0$:



- Fläche der vier Matten ist $\leq$ ganzer Boden: $4ab \leq (a+b)^2$
- Mattenseiten andere Variablen: ergibt andere Ungleichungen
- Funktionieren diese Beweise auch für allgemeine AM-GM-Ungleichung?

Für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ gilt $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$

- Induktion erweist sich zuerst nur praktisch für Zweierpotenzen $n$
- Beweise geometrisch in höheren Dimensionen ??
- oder mit Matten, d.h. Hypermatten in höheren Dimensionen ??
- Andere Beweisideen?

- Sehr elegante Beweisidee für allgemeine AM-GM-Ungleichung aus George Pólya's Traum : Aus Analysis verwenden wir

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $1 + x \leq e^x$ und daher $x \leq e^{x-1}$

- Für $A := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ ist mit $x \leq e^{x-1}$ und Potenzregeln für alle $i$:

$$\frac{a_i}{A} \leq e^{a_i/A-1} \Rightarrow \left(\frac{a_i}{A}\right)^{1/n} \leq \left(e^{a_i/A-1}\right)^{1/n} = e^{\frac{a_i}{n}\cdot\frac{1}{A}-1/n}$$

- Also folgt mit Potenzregeln

$$\begin{aligned}\frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}}{A} &= \left(\frac{a_1}{A}\right)^{1/n}\left(\frac{a_2}{A}\right)^{1/n}\cdots\left(\frac{a_n}{A}\right)^{1/n} \\ &\leq e^{\frac{a_1}{n}\cdot\frac{1}{A}-1/n}\cdot e^{\frac{a_2}{n}\cdot\frac{1}{A}-1/n}\cdots e^{\frac{a_n}{n}\cdot\frac{1}{A}-1/n} \\ &= e^{1-1} = e^0 = 1\end{aligned}$$

- Somit ist $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ (Wow !)

- Für Beweis von (1) hilfreich $a + 1/a \geq 2$ für alle $a > 0$.
- Wichtige elementare Ungleichungen für $a, b > 0$, die aus $x^2 \geq 0$ folgen:
- $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ (das gilt sogar für alle $a, b \in \mathbb{R}$)
- $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($\cdot \frac{1}{ab}$ und dann $b = 1$)
- $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{1/a+1/b}$
- Also eleganter Beweis von (1):

Mit $x/y + y/x \geq 2$ und analog für $x/z$ und $y/z$ gilt die zu (1) äquivalente Ungleichung

$$(x+y+z)(1/x+1/y+1/z)$$
$$= 1+1+1+x/y+y/x+x/z+z/x+y/z+z/y \geq 3+3\cdot 2 = 9.$$

- Es existieren noch viele allgemeinere (teils aberwitzige) Ungleichungen, die die elementare AM-GM-Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ verallgemeinern:

**(Sehr) allgemeine AM-GM-Ungleichung**

Seien $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, $k_1, \ldots, k_n \in (0,1)$ mit $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$. Dann gilt

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} \leq k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n.$$

Zudem gilt die Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_n$.
(Beweis analog zu Beweis allgemeiner AM-GM-Ungleichung).

## Maclaurin-Ungleichung

Ungleichungen von dem Typ: Für alle $a, b, c, d \geq 0$ gilt:

$$(abcd)^{1/4} \leq \left(\frac{abc + abd + bcd + acd}{4}\right)^{1/3} \leq \left(\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}\right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{a + b + c + d}{4}$$

(Beweise komplizierter).

- Weitere sehr wilde Ungleichungen:
- Newton-Ungleichungen
- Muirhead-Ungleichungen

# Knobelaufgaben

Zeige für alle $a, b, c \geq 0$:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

*Hinweis*: Viele Beweise möglich mittels Ungleichungen auf Folie 7.

Beweise: Die Länge $GM$ auf Folie 4 ist tatsächlich $\sqrt{ab}$. Beweise nur mittels Ähnlichkeit von Dreiecken möglich?

Beweise für alle $a_1, \ldots, a_n > 0$ die allgemeine AM-GM-HM-Ungleichung:

$$\min_{i \leq n} a_i \leq \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \leq \max_{i \leq n} a_i,$$

wobei min (Minimum) die kleinste und max (Maximum) die größte der $n$ Zahlen ist. Zeige: die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_n$.
*Hinweis*: Allgemeine AM-GM-Ungleichung.