Analysis für Wirtschaftsinformatiker

8. Konvergenz von Folgen

Peter Parczewski

Die Inhalte dieser Folge

- Konvergenz/Divergenz einer Folge

Die Inhalte dieser Folge

- Konvergenz/Divergenz einer Folge
- Grenzwert (Limes)

Die Inhalte dieser Folge

- Konvergenz/Divergenz einer Folge
- Grenzwert (Limes)
- Beispiele für Folgen und Konvergenz

Die Inhalte dieser Folge

- Konvergenz/Divergenz einer Folge
- Grenzwert (Limes)
- Beispiele für Folgen und Konvergenz
- Limes-Ungleichung

Die Inhalte dieser Folge

- Konvergenz/Divergenz einer Folge
- Grenzwert (Limes)
- Beispiele für Folgen und Konvergenz
- Limes-Ungleichung
- Limesregeln

Die Inhalte dieser Folge

- Konvergenz/Divergenz einer Folge
- Grenzwert (Limes)
- Beispiele für Folgen und Konvergenz
- Limes-Ungleichung
- Limesregeln
- **Highlight**: Wichtigste Grenzwerte

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

Explizite Folge $\left(f_n = \frac{n}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (auch andere **Indexmengen** möglich)

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (auch andere **Indexmengen** möglich)
- Für eine endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist $(f_i)_{i\in I}$ eine endliche Folge.

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (auch andere **Indexmengen** möglich)
- Für eine endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist $(f_i)_{i\in I}$ eine endliche Folge.

  Folge auch durch eine **rekursive Vorschrift (Rekursion)**:

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (auch andere **Indexmengen** möglich)
- Für eine endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist $(f_i)_{i\in I}$ eine endliche Folge.

  Folge auch durch eine **rekursive Vorschrift (Rekursion)**:
- Sei $a_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ ist $a_{n+1} = -a_n/2$:
  $(a_n)_{n\geq 0} = (2, -1, 1/2, -1/4, 1/8, \ldots)$

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

- $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
- $\left(n^2 - 2n\right)_{n\geq 3} = (3, 8, 15, 24, \ldots)$ (auch andere **Indexmengen** möglich)
- Für eine endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist $(f_i)_{i\in I}$ eine endliche Folge.

  Folge auch durch eine **rekursive Vorschrift (Rekursion)**:
- Sei $a_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ ist $a_{n+1} = -a_n/2$:
  $(a_n)_{n\geq 0} = (2, -1, 1/2, -1/4, 1/8, \ldots)$
- **Fibonacci-Folge**: $f_0 = f_1 = 1$ und für alle $n \geq 1$ ist $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

Konvergenz

Definition (Grenzwert (Limes), Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **kovergent gegen** a, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Konvergenz

Definition (Grenzwert (Limes), Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **kovergent gegen** a, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt **Nullfolge**.
Existiert keine solche Zahl a, so heißt die Folge **divergent**.

Konvergenz

Definition (Grenzwert (Limes), Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **kovergent gegen** a, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt **Nullfolge**.
Existiert keine solche Zahl a, so heißt die Folge **divergent**.
Die Definition gilt analog für komplexe Folgen mit dem Betrag in $\mathbb{C}$.

Konvergenz

Definition (Grenzwert (Limes), Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:

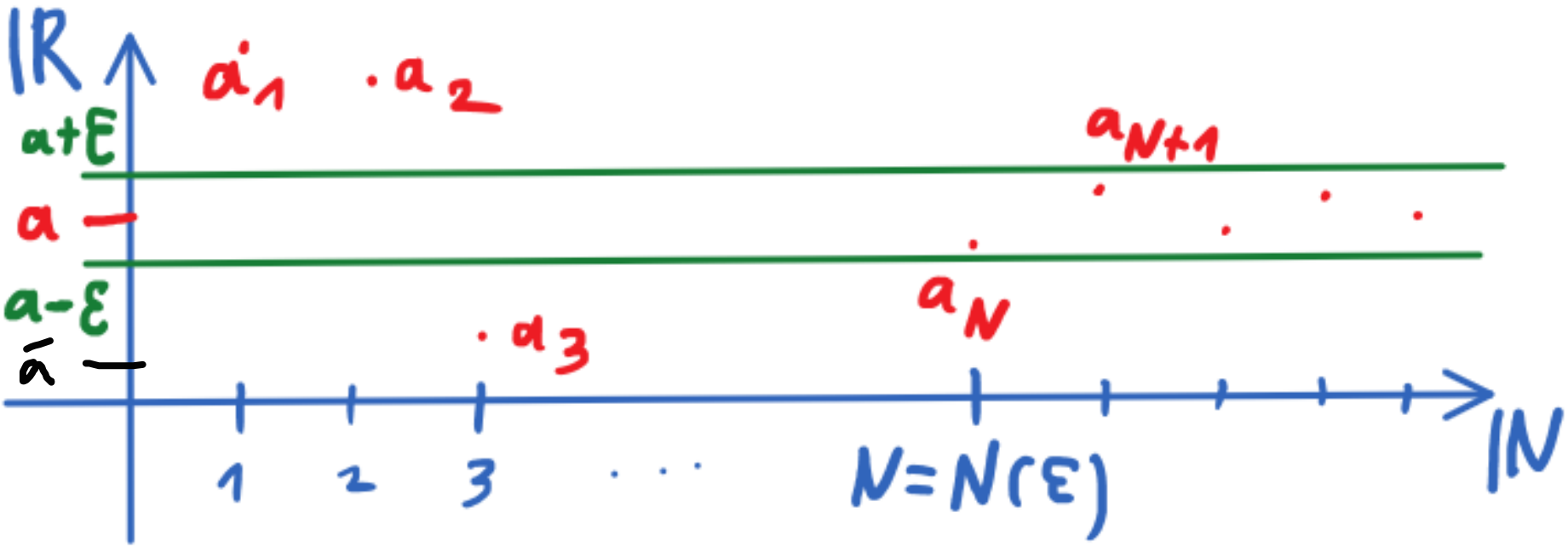
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **kovergent gegen** a, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt **Nullfolge**.
Existiert keine solche Zahl a, so heißt die Folge **divergent**.
Die Definition gilt analog für komplexe Folgen mit dem Betrag in $\mathbb{C}$.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (oder $\subset \mathbb{C}$) heißt **beschränkt**, wenn ein $M \geq 0$ existiert, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ansonsten heißt die Folge **unbeschränkt**.

Konvergenz



Skizze Definition Grenzwert: Ab einem Index $N = N(\varepsilon)$ gilt stets $|a - a_n| < \varepsilon$

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!

Bew: Für $\varepsilon = 1 > 0$ ex. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Mit Δ-Ungl. ist für diese $n \geq N$:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| < \infty \text{ ☺}$$

Für $n < N$ ist eine Schranke $|a_n| \leq \max\limits_{n<N}\{|a_n|\}$ beschränkt

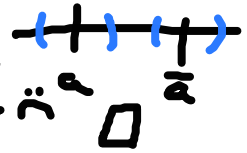
Also ist insgesamt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, \varepsilon + |a|\} < \infty$ ☺

Angenommen, es gibt zwei Grenzwerte a und $\bar{a}$ von Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $a \neq \bar{a}$

Für $\varepsilon := \frac{|a - \bar{a}|}{3}$ und das dazugehörige $N \in \mathbb{N}$ ist der Widerspruch für $n \geq N$

$$3\varepsilon = |a - \bar{a}| = |(a - a_n) + (a_n - \bar{a})| \leq |a - a_n| + |\bar{a} - a_n| < 2\varepsilon \text{ ↯}$$

Δ-Ungl.



und damit ist $a = \bar{a}$. □

Konvergenz

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!

Die Umkehrung der Aussage in Satz ist aber falsch! Wie das Beispiel zeigt:

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.

Konvergenz

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!

Die Umkehrung der Aussage in Satz ist aber falsch! Wie das Beispiel zeigt:

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.
- Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

Konvergenz

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!

Die Umkehrung der Aussage in Satz ist aber falsch! Wie das Beispiel zeigt:

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.
- Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

Konvergenz

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!

Die Umkehrung der Aussage in Satz ist aber falsch! Wie das Beispiel zeigt:

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.
- Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

Es gilt nach Definition die Äquivalenz: $a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| \to 0.$

bedeutet: Für alle $\varepsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$: $\underline{=} \; ||a_n - a| - 0| < \varepsilon$

$|a_n - a|$

Konvergenz

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig!

Die Umkehrung der Aussage in Satz ist aber falsch! Wie das Beispiel zeigt:

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.
- Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

Es gilt nach Definition die Äquivalenz: $a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| \to 0.$

Mittels obiger Äquivalenz erhalten wir direkt:

Für alle $x \in \mathbb{C}$ und $a_n \to a$ gilt auch:

$$|xa_n - xa| = |x||a_n - a| \to 0 \quad \Rightarrow \quad xa_n \to xa.$$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

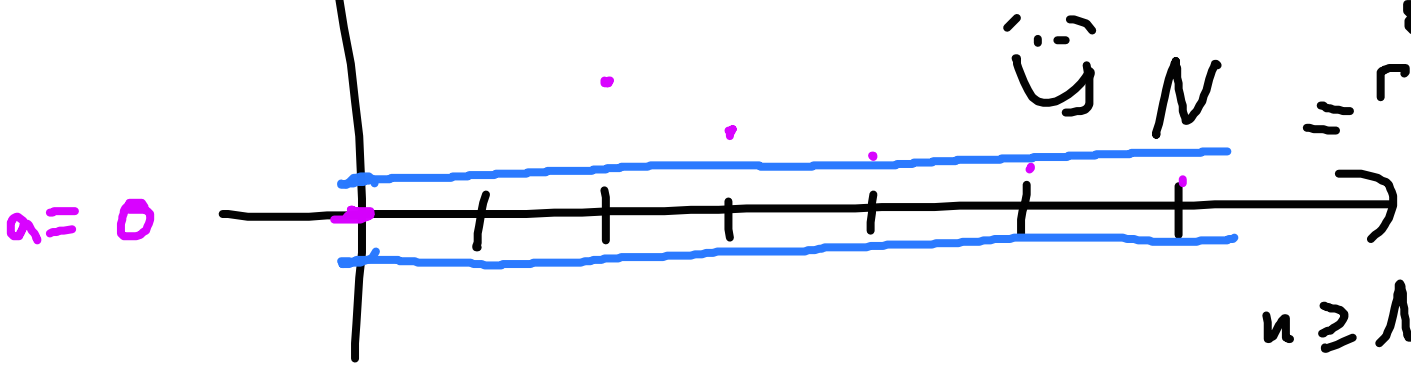
- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

$\underline{\frac{1}{n}}$ $= \left|\frac{1}{n}\right| = |a_n - 0| < \underline{\varepsilon}$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$

$= \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \leq n$



$n \geq N$:

$n < m \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ $\quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

  Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

$$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

  Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

  $$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

  Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

  $$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

  Also folgt auch

  $$n \geq N \geq 1 \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

  Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

  $$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

  Also folgt auch

  $$n \geq N \geq 1 \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

  Somit erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1/n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

  Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

  $$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

  Also folgt auch

  $$n \geq N \geq 1 \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

  Somit erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1/n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

  Das ist nach Definition gerade die Konvergenz $1/n \to 0$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Jede konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{C}$ ist konvergent gegen a.
- $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge:

  Zu einem $\varepsilon > 0$ ist ein N gesucht mit $1/N < \varepsilon$. Natürlich existiert immer ein solches $N = N(\varepsilon)$, da

  $$0 < 1/N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/\varepsilon$$

  Zum Beispiel nehme man direkt die nächste ganze Zahl $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

  Also folgt auch

  $$n \geq N \geq 1 \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

  Somit erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1/n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

  Das ist nach Definition gerade die Konvergenz $1/n \to 0$.

  Wichtig: Die Folgenglieder $a_n = 1/n$ **konvergieren (d.h. gehen)** gegen 0 - den Grenzwert der Folge - aber die Folgenglieder **sind nicht** der Grenzwert, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist offenbar $1/n \neq 0$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent , denn angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert, so ist für $\varepsilon \in (0,1)$ mittels Dreiecksungleichung der Widerspruch:

  $$2 = |(1-a)+(1+a)| \leq |1-a| + |1+a| = |a-1| + |a-(-1)| \leq \varepsilon + \varepsilon < 2$$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent , denn angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert, so ist für $\varepsilon \in (0,1)$ mittels Dreiecksungleichung der Widerspruch:

  $$2 = |(1-a)+(1+a)| \leq |1-a| + |1+a| = |a-1| + |a-(-1)| \leq \varepsilon + \varepsilon < 2$$

Definition (Teilfolge und Häufungspunkt)

Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Existiert eine gegen a konvergente Teilfolge, so heißt a **Häufungspunkt** der Folge.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent , denn angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert, so ist für $\varepsilon \in (0,1)$ mittels Dreiecksungleichung der Widerspruch:

  $$2 = |(1-a)+(1+a)| \leq |1-a| + |1+a| = |a-1| + |a-(-1)| \leq \varepsilon + \varepsilon < 2$$

Definition (Teilfolge und Häufungspunkt)

Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Existiert eine gegen a konvergente Teilfolge, so heißt a **Häufungspunkt** der Folge.

- Die reelle divergente Folge $a_n = (-1)^n$ hat nur die beiden Häufungspunkte 1 und -1.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent , denn angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert, so ist für $\varepsilon \in (0,1)$ mittels Dreiecksungleichung der Widerspruch:

  $$2 = |(1-a)+(1+a)| \leq |1-a| + |1+a| = |a-1| + |a-(-1)| \leq \varepsilon + \varepsilon < 2$$

Definition (Teilfolge und Häufungspunkt)

Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Existiert eine gegen a konvergente Teilfolge, so heißt a **Häufungspunkt** der Folge.

- Die reelle divergente Folge $a_n = (-1)^n$ hat nur die beiden Häufungspunkte 1 und -1.
- Jeder Grenzwert ist ein Häufungspunkt. Aber nicht umgekehrt: Folge $a_n = (-1)^n$.

Limes-Ungleichung

Proposition (Limes-Ungleichung)

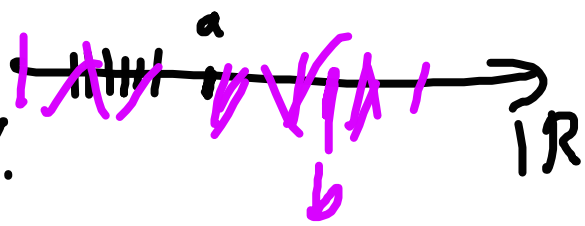
Gilt für reelle Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$ sowie

$$a_n \leq b_n$$

für unendlich viele n, dann ist auch $a \leq b$.

jedes Beliebige

Bew: Mit Def. Konvergenz ist für ~~ein~~ $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.



Also ist für diese:

$$\underline{a - \varepsilon} \leq a_n \leq b_n \leq \underline{b + \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad a - b \leq 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt auch $a - b \leq 0 \iff a \leq b$ ☺

$\square$

Limes-Ungleichung

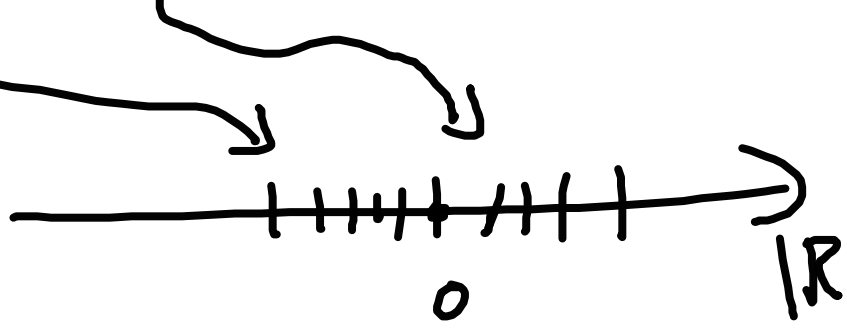
Proposition (Limes-Ungleichung)

Gilt für reelle Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$ sowie

$$a_n \leq b_n$$

für unendlich viele n, dann ist auch $a \leq b$.

Beachte: Aus $a_n < b_n$ folgt im Limes nicht $a < b$!
Beispiel: Für die Folgen $a_n = -1/n < 1/n = b_n$ ist $a_n \to 0 = 0 \leftarrow b_n$.



Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **Geometrische Folge: $z^n \to 0$ für $|z| < 1$:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $a_n = z^n$ eine Nullfolge:

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **Geometrische Folge: $z^n \to 0$ für $|z| < 1$:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $a_n = z^n$ eine Nullfolge:

  Für $z = 0$ ist es die konstante Nullfolge.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **Geometrische Folge: $z^n \to 0$ für $|z| < 1$:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $a_n = z^n$ eine Nullfolge:

  Für $z = 0$ ist es die konstante Nullfolge. $z \neq 0 \Leftrightarrow |z| \neq 0$

  Ansonsten ist für die Wahl

  $a_n \to a$

  $c \cdot a_n \to c \cdot a$

$$x := \frac{1 - |z|}{|z|} > 0 \quad \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{1+x}$$

mit der Bernoulli-Ungleichung, Limes-Ungleichung und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$:

$(1+x)^n \geq 1+nx$

$$0 < |z^n| = |z|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} \to 0.$$

$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n}$

Damit folgt $|z^n| \to 0$ für $n \to \infty$ bzw. $z^n \to 0$

Begründung $1/n \to 0$ ist wichtig

Warum ist die **Begründung** $1/n \to 0$ **so wichtig**?

Begründung $1/n \to 0$ ist wichtig

Warum ist die **Begründung $1/n \to 0$ so wichtig**?

Weil wir den Grenzwert oder die Idee in allen Beispielen bisher verwenden!

Zudem ist das Argument noch allgemeiner.

Zuerst erinnern wir an die Definition der Monotonie, die nun für eine reelle Folge lautet: Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist:

Begründung $1/n \to 0$ ist wichtig

Warum ist die **Begründung $1/n \to 0$ so wichtig**?

Weil wir den Grenzwert oder die Idee in allen Beispielen bisher verwenden!

Zudem ist das Argument noch allgemeiner.

Zuerst erinnern wir an die Definition der Monotonie, die nun für eine reelle Folge lautet: Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist:

(streng) monoton steigend, wenn für alle $n < m$ stets $a_n \leq a_m$ (streng: $a_n < a_m$).

(streng) monoton fallend, wenn für alle $n < m$ stets $a_n \geq a_m$ (streng: $a_n > a_m$).

Begründung $1/n \to 0$ ist wichtig

Warum ist die **Begründung $1/n \to 0$ so wichtig**?

Weil wir den Grenzwert oder die Idee in allen Beispielen bisher verwenden!

Zudem ist das Argument noch allgemeiner.

Zuerst erinnern wir an die Definition der Monotonie, die nun für eine reelle Folge lautet: Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist:

(streng) monoton steigend, wenn für alle $n < m$ stets $a_n \leq a_m$ (streng: $a_n < a_m$).

(streng) monoton fallend, wenn für alle $n < m$ stets $a_n \geq a_m$ (streng: $a_n > a_m$).

Notation: Wir schreiben für eine **monoton steigende und unbeschränkte Folge** kurz

$$a_n \nearrow \infty.$$

(Wir sagen umgangsprachlich auch: *Die Folge explodiert.*) Analog verwenden wir für eine **monoton fallende unbeschränkte Folge** die Kurzschreibweise $a_n \searrow -\infty$.

Analog zu $1/n \to 0$ folgt nun auch:

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- $(a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0)$: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:

$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$

$\frac{1}{a_N} < \varepsilon \Leftrightarrow a_N > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Leftarrow$ alle $n \geq N$ ist

$a_n \geq a_N \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_N} < \varepsilon$ ☺

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$)**: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:
$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$
- **($1/n^k \to 0$)**: Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$)**: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:
$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$
- **($1/n^k \to 0$)**: Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- **($\sqrt{1/n} \to 0$)**: Ebenso ist wegen $n^{1/2} \nearrow \infty$ auch $a_n = \sqrt{1/n} = n^{-1/2}$ eine Nullfolge.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$)**: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:
$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$
- **($1/n^k \to 0$)**: Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- **($\sqrt{1/n} \to 0$)**: Ebenso ist wegen $n^{1/2} \nearrow \infty$ auch $a_n = \sqrt{1/n} = n^{-1/2}$ eine Nullfolge.
- Ebenso ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $n^{-k/2} \to 0$.

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$)**: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:
$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$
- **($1/n^k \to 0$)**: Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- **($\sqrt{1/n} \to 0$)**: Ebenso ist wegen $n^{1/2} \nearrow \infty$ auch $a_n = \sqrt{1/n} = n^{-1/2}$ eine Nullfolge.
- Ebenso ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $n^{-k/2} \to 0$.
- **($\sqrt[n]{n} \to 1$):** Mittels $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Binomialsatz ist
$$n = \underbrace{(1 + a_n)^n}_{(\sqrt{n})^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2$$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$)**: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:
$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$
- **($1/n^k \to 0$)**: Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- **($\sqrt{1/n} \to 0$)**: Ebenso ist wegen $n^{1/2} \nearrow \infty$ auch $a_n = \sqrt{1/n} = n^{-1/2}$ eine Nullfolge.
- Ebenso ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $n^{-k/2} \to 0$.
- **($\sqrt[n]{n} \to 1$):** Mittels $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Binomialsatz ist
$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2$$
$$\Rightarrow \ n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \ \Leftrightarrow a_n \leq \sqrt{2/n}.$$

$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0$

Wichtige Beispiele für Konvergenz

- **($a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0$)**: Für jede positive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ gilt die Äquivalenz:
$$a_n \nearrow \infty \Leftrightarrow \ 1/a_n \to 0.$$
- **($1/n^k \to 0$)**: Zum Beispiel ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ wegen $n^k \nearrow \infty$ auch die Folge $a_n = 1/n^k$ eine Nullfolge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- **($\sqrt{1/n} \to 0$)**: Ebenso ist wegen $n^{1/2} \nearrow \infty$ auch $a_n = \sqrt{1/n} = n^{-1/2}$ eine Nullfolge.
- Ebenso ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $n^{-k/2} \to 0$.
- **($\sqrt[n]{n} \to 1$):** Mittels $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Binomialsatz ist
$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2$$
$$\Rightarrow \ n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \ \Leftrightarrow a_n \leq \sqrt{2/n}.$$
Mit $n^{-1/2} \to 0$ und Limes-Ungl. folgt $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \to 0$ und somit $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Wichtigste Grenzwerte

Damit haben wir also die **wichtigsten Grenzwerte**:

$\boxed{1/n \to 0}$ und allgemein $1/n^k \to 0$ für $k \in \mathbb{N}$ beliebig,
und allgemeiner $1/a_n \to 0$ für $a_n \nearrow \infty$,
beispielsweise auch $n^{-1/2} \to 0$,

$z^n \to 0$, für $|z| < 1$,

$\sqrt[n]{n} \to 1$.