Analysis für Wirtschaftsinformatiker

6. Polynome

Peter Parczewski

Die Inhalte dieser Folge

- Polynome

Die Inhalte dieser Folge

- Polynome
- rationale Funktionen

Die Inhalte dieser Folge

- Polynome
- rationale Funktionen
- Linearfaktorzerlegung

Die Inhalte dieser Folge

- Polynome
- rationale Funktionen
- Linearfaktorzerlegung
- Polynomdivision

Die Inhalte dieser Folge

- Polynome
- rationale Funktionen
- Linearfaktorzerlegung
- Polynomdivision
- Partialbruchzerlegung

Die Inhalte dieser Folge

- Polynome
- rationale Funktionen
- Linearfaktorzerlegung
- Polynomdivision
- Partialbruchzerlegung
- **Highlight**: Identitätssatz:
  Haben zwei Polynome von Grad n mehr als n Stellen gemeinsam, dann sind sie identisch!

Polynome sind die einfachsten und wichtigsten Funktionen in der Analysis, da sie zur Approximation und Interpolation ($\rightsquigarrow$ Potenzreihen, Taylorpolynome) verwendet werden.

Definition (Polynom)

Für die **Koeffizienten** $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ heißt die Funktion

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

(komplexes) Polynom vom **Grad** $\operatorname{Grad}(f) := n \in \mathbb{N}_0$.

Sind alle Koeffizienten Null, so heißt die Funktion $f = 0$ **Nullpolynom**.

Für Grad 0 heißt $f = a_0 \in \mathbb{C}$ **konstantes Polynom**.

Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ heißt **Nullstelle** von f.

Ein Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit reellen Koeffizienten heißt **reelles Polynom**.

Polynomdivision

- **Division mit Rest (Polynomdivision)**: Seien f und $g \neq 0$ Polynome. Dann gibt es eindeutige Polynome q und r mit $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$ oder $r = 0$, so dass $f = qg + r$.

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$$

Erinnerung Division mit Rest in $\mathbb{Z}$:

Beispiel

$$8:3 = 2 + \frac{2}{3}$$

oder $8 = 2 \cdot 3 + 2$

Beispiel

$f(x) = x^2 + 5$

$g(x) = x + 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+5}{x+1} = \underbrace{x(x+1)}_{x^2+x} + \frac{-x+5}{x+1} = x(x+1) \underbrace{-(x+1)}_{-x-1}$$

$$= (x-1) + \frac{6}{x+1}$$

Probe: $x^2 - 1 + 6 = x^2 + 5$ ☺

$$\frac{+1+5}{x+1}$$

Polynomdivision

- **Division mit Rest (Polynomdivision)**: Seien f und $g \neq 0$ Polynome. Dann gibt es eindeutige Polynome q und r mit $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$ oder $r = 0$, so dass $f = qg + r$.
- Ist z_0 eine Nullstelle von f, so gibt es ein Polynom g mit $\mathrm{Grad}(g) = \mathrm{Grad}(f) - 1$ und $f(z) = g(z)(z - z_0)$. D.h. f ist **teilbar** durch $z - z_0$.

$f(x) = 2x^3 - 8 \quad , g(x) = 4x^2 + 2$

$f = q \cdot g + r = \underbrace{\frac{1}{2}x \cdot (4x^2+2)}_{2x^3+x} - (x+8)$

$q(x) = \frac{1}{2}x \quad , r(x) = -(x+8)$

Polynomdivision

- **Division mit Rest (Polynomdivision)**: Seien f und $g \neq 0$ Polynome. Dann gibt es eindeutige Polynome q und r mit $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$ oder $r = 0$, so dass $f = qg + r$.
- Ist z_0 eine Nullstelle von f, so gibt es ein Polynom g mit $\mathrm{Grad}(g) = \mathrm{Grad}(f) - 1$ und $f(z) = g(z)(z - z_0)$. D.h. f ist **teilbar** durch $z - z_0$.
- Ist f durch $(z - z_0)^k$ aber nicht mehr durch $(z - z_0)^{k+1}$ ohne Rest teilbar für $k \in \mathbb{N}$, dann heißt z_0 eine **vielfache**, genauer k-**fache Nullstelle** von f.

Polynomdivision

- **Division mit Rest (Polynomdivision)**: Seien f und $g \neq 0$ Polynome. Dann gibt es eindeutige Polynome q und r mit $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$ oder $r = 0$, so dass $f = qg + r$.
- Ist z_0 eine Nullstelle von f, so gibt es ein Polynom g mit $\mathrm{Grad}(g) = \mathrm{Grad}(f) - 1$ und $f(z) = g(z)(z - z_0)$. D.h. f ist **teilbar** durch $z - z_0$.
- Ist f durch $(z - z_0)^k$ aber nicht mehr durch $(z - z_0)^{k+1}$ ohne Rest teilbar für $k \in \mathbb{N}$, dann heißt z_0 eine **vielfache**, genauer k-**fache Nullstelle** von f.

Ein Beispiel für eine Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 7 : (x^2 - 2x + 1) = \underbrace{x^2 + 4}_{q} + \overbrace{\frac{2x - 11}{(x-1)^2}}^{r} \\
-(x^4 - 2x^3 \quad + x^2) \\
\qquad\qquad 4x^2 - 6x - 7 \\
\qquad\qquad -(4x^2 - 8x + 4) \\
\qquad\qquad\qquad 2x - 11
\end{array}
$$

$$f : g = q + \frac{r}{g}$$

Linearfaktorzerlegung

Satz (Linearfaktorzerlegung)

Jedes nichtkonstante komplexe Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

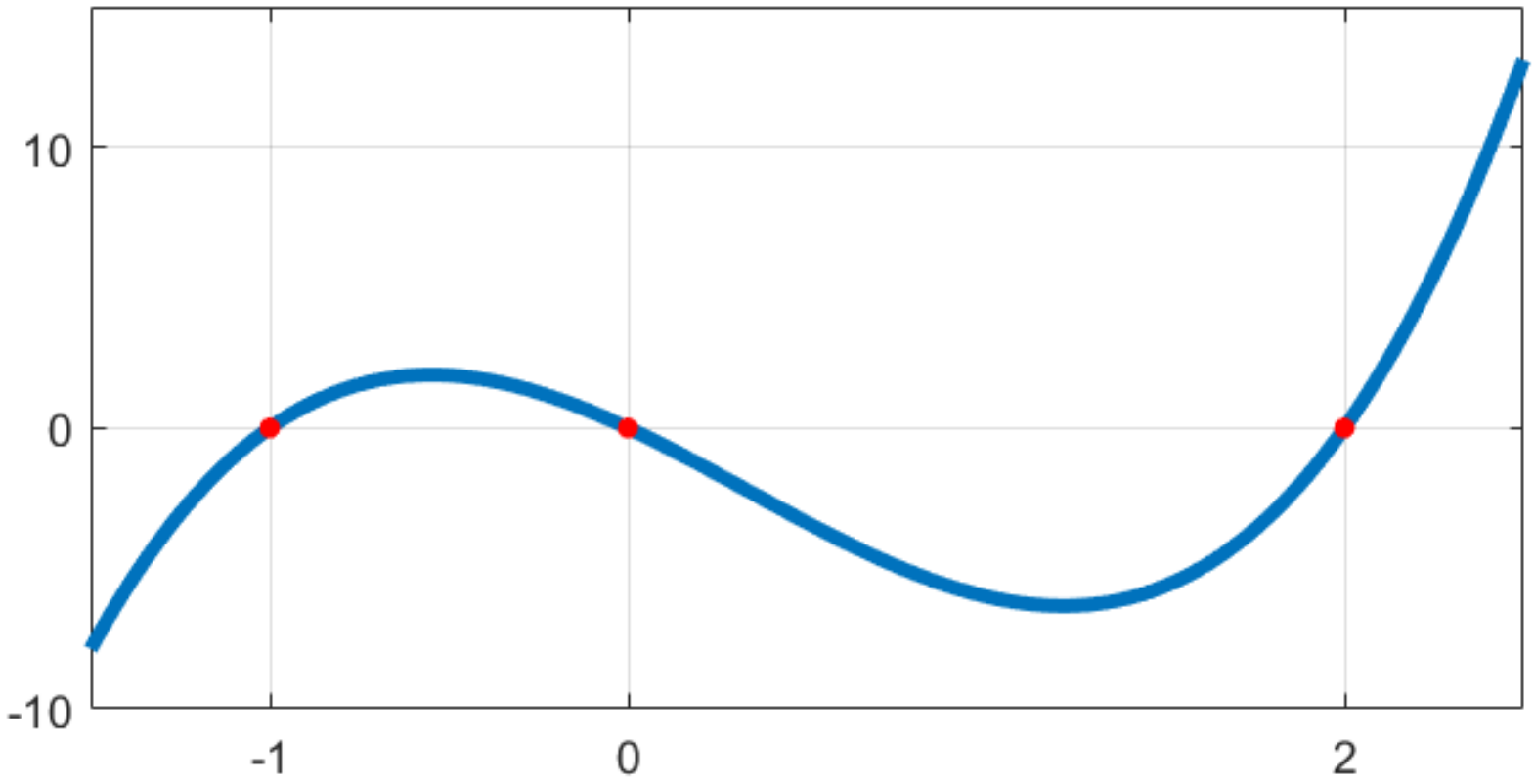
besitzt eine Darstellung als Produkt von n Linearfaktoren*:*

$$f(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

wobei mehrere Nullstellen α_k *identisch sein können (*vielfache Nullstelle*).*

<u>Bew</u>: Mit Fundamentalsatz der Algebra (2.5) spalte ich die n (evtl. identischen) Nullstellen aus f mittels Polynomdivision ab. Wir erhalten die eindeutige Darstellung als Produkt von Linearfaktoren. □ ☺

Linearfaktorzerlegung



Polynom $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6x = 3(x+1)x(x-2)$

Folgerungen aus Linearfaktorzerlegung

Korollar

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*

Folgerungen aus Linearfaktorzerlegung

Korollar

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*
- *Ein nichtkonstantes reelles Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*

Folgerungen aus Linearfaktorzerlegung

Korollar

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*
- *Ein nichtkonstantes reelles Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*
- *Ein solches reelles Polynom kann nicht immer in Linearfaktoren zerlegt werden: Beispiel $f(x) = x^2 + 1$*

Folgerungen aus Linearfaktorzerlegung

Korollar

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*
- *Ein nichtkonstantes reelles Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*
- *Ein solches reelles Polynom kann nicht immer in Linearfaktoren zerlegt werden: Beispiel $f(x) = x^2 + 1$*
- *Die nicht reellen Nullstellen eines reellen Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treten jedoch immer in* konjugierten Paaren *auf:*

$$f(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_0 = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = \overline{f(z)} = 0$$

Folgerungen aus Linearfaktorzerlegung

Korollar

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*
- *Ein nichtkonstantes reelles Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*
- *Ein solches reelles Polynom kann nicht immer in Linearfaktoren zerlegt werden: Beispiel $f(x) = x^2 + 1$*
- *Die nicht reellen Nullstellen eines reellen Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treten jedoch immer in* konjugierten Paaren *auf:*

$$f(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_0 = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = \overline{f(z)} = 0$$

Bew (Identitätssatz): Das Polynom $f-g$ vom Grad n hat mindestens $n+1$ Nullstellen, ist also konstant, also das Nullpolynom, somit ist $f=g$. $\square$ ☺

Folgerungen aus Linearfaktorzerlegung

Korollar

- *Ein nichtkonstantes komplexes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Nullstellen.*
- *Ein nichtkonstantes reelles Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.*
- *Ein solches reelles Polynom kann nicht immer in Linearfaktoren zerlegt werden: Beispiel $f(x) = x^2 + 1$*
- *Die nicht reellen Nullstellen eines reellen Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treten jedoch immer in* konjugierten Paaren *auf:*

$$f(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_0 = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = \overline{f(z)} = 0$$

Satz (Identitätssatz)

Stimmen zwei Polynome f und g von Grad n an $n+1$ verschiedenen Stellen überein, dann sind sie identisch. $\in \mathbb{N}_0$

Rationale Funktion und Partialbruchzerlegung

Definition (Rationale Funktion)

Für zwei Polynome f, g mit $g \neq 0$ heißt die Funktion $r(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ **rationale Funktion**.

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{C}$ (bzw. bei reellen Polynomen $\mathbb{R}$) **ohne** die Nullstellen von g.

Eine k-fache Nullstelle von g heißt hierbei k-**facher Pol (Polstelle)** von r.

Rationale Funktion und Partialbruchzerlegung

Definition (Rationale Funktion)

Für zwei Polynome f, g mit $g \neq 0$ heißt die Funktion $r(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ **rationale Funktion**.

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{C}$ (bzw. bei reellen Polynomen $\mathbb{R}$) **ohne** die Nullstellen von g.

Eine k-fache Nullstelle von g heißt hierbei k-**facher Pol (Polstelle)** von r.

Die **Partialbruchzerlegung** einer rationalen Funktion $r = f/g$ mit den einfachen Polstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$ ist für passende $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$):

$$r(z) = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - z_n}.$$

Rationale Funktion und Partialbruchzerlegung

Definition (Rationale Funktion)

Für zwei Polynome f, g mit $g \neq 0$ heißt die Funktion $r(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ **rationale Funktion**.

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{C}$ (bzw. bei reellen Polynomen $\mathbb{R}$) **ohne** die Nullstellen von g.

Eine k-fache Nullstelle von g heißt hierbei k-**facher Pol (Polstelle)** von r.

Die **Partialbruchzerlegung** einer rationalen Funktion $r = f/g$ mit den einfachen Polstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$ ist für passende $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$):

$$r(z) = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - z_n}.$$

Handelt es sich um k_j-fache Polstellen z_j, so gilt allgemeiner für passende $c_{11}, \ldots, c_{nk_n} \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$):

$$r(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{k_j} \frac{c_{jl}}{(z - z_j)^l}.$$

Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung

Beispiel: Sei $r(x) = (3x-1)/g(x)$ für $g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.

$$x(x^2 - 2x + 1)$$

$$\frac{3x-1}{x^3-2x^2+x}$$

Also Ansatz: $r(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = c_1(x-1)^2 + c_2 x(x-1) + c_3 x$$

Für $x=0$: $-1 = c_1 \Rightarrow c_1 = -1$

Für $x=1$: $2 = c_3$

Für $x=-1$: $-4 = -4 + 2c_2 + (-2) \Rightarrow c_2 = 1$

Partialbruchzerlegung

Beispiel: Sei $r(x) = (3x-1)/g(x)$ für $g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.
Wir machen den Ansatz:

$$r(x) = \frac{c_{11}}{x} + \frac{c_{21}}{x-1} + \frac{c_{22}}{(x-1)^2}$$

$$\iff \quad 3x - 1 = c_{11}(x-1)^2 + c_{21}x(x-1) + c_{22}x. \tag{1}$$

Partialbruchzerlegung

Beispiel: Sei $r(x) = (3x-1)/g(x)$ für $g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.
Wir machen den Ansatz:

$$r(x) = \frac{c_{11}}{x} + \frac{c_{21}}{x-1} + \frac{c_{22}}{(x-1)^2}$$

$$\iff \quad 3x - 1 = c_{11}(x-1)^2 + c_{21}x(x-1) + c_{22}x. \tag{1}$$

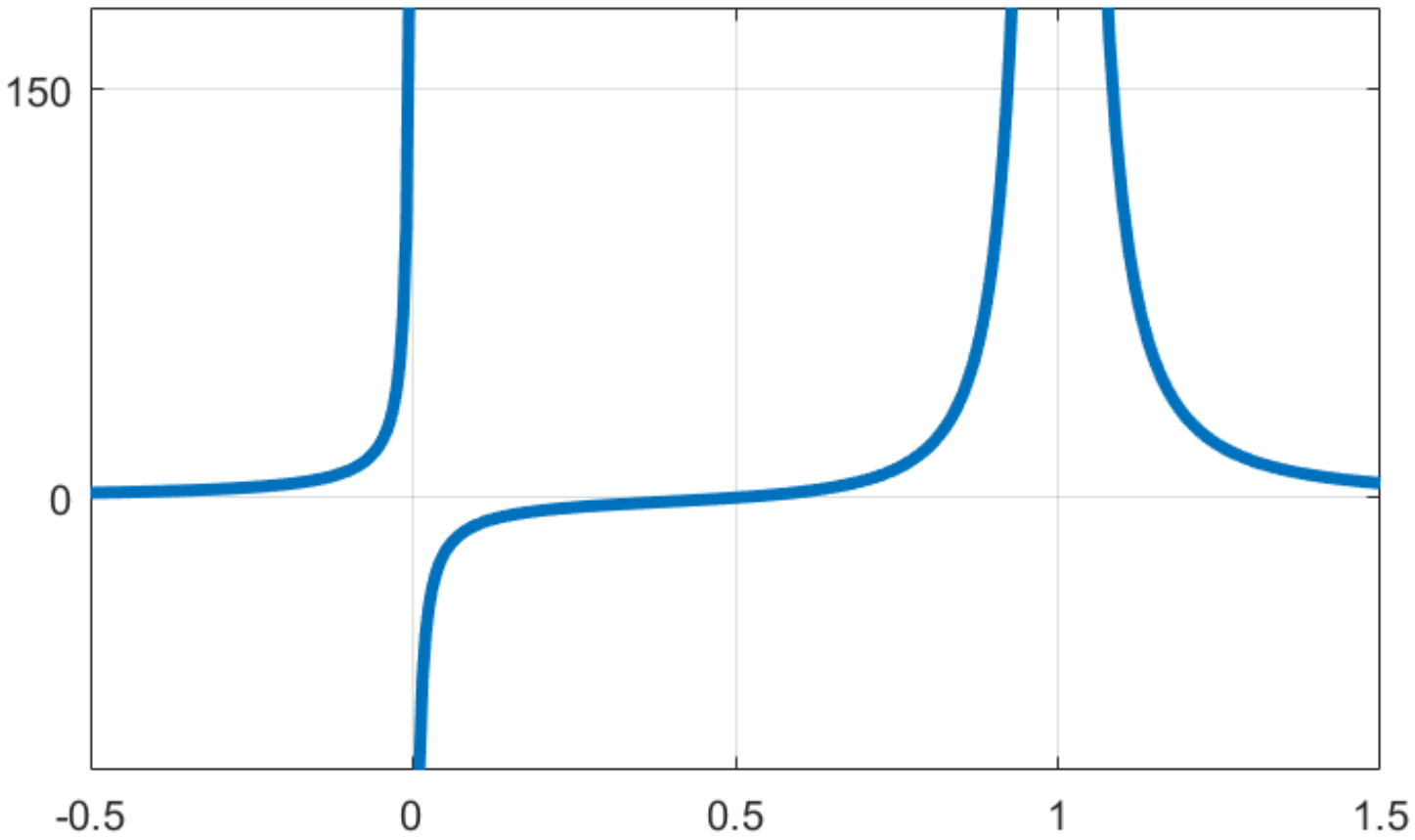
Einsetzen von $x = 0$ in (1) liefert direkt $c_{11} = -1$ und $x = 1$ in (1) ergibt $c_{22} = 2$.
Um c_{21} zu bestimmen setzen wir einen weiteren Wert ein, mit dem die Rechnung einfach ist, z.B. $x = 2$. Damit erhalten wir in (1) $: 5 = -1 + 2c_{21} + 4$, also $c_{21} = 1$.
Somit folgt die Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{3x-1}{x^3 - 2x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\,.$$

Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{3x-1}{x^3-2x^2+x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\,.$$



Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{3x+4}{(x-7)^2(x+4)} = \frac{c_1}{x+4} + \frac{c_2}{x-7} + \frac{c_3}{(x-7)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+4 = c_1(x-7)^2 + c_2(x-7)(x+4) + c_3(x+4)$$

Für $x=-4$: $\quad -8 = 121\,c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{8}{121}$

Für $x=7$: $\quad 25 = 11\,c_3 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{25}{11}$

Für $x=6$: $\quad 22 = -\frac{8}{121} + c_2\cdot(-1)10 + 10\cdot\frac{25}{11}$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{22 + \frac{8}{121} - \frac{250}{11}}{-10}$$