Analysis für Wirtschaftsinformatiker

5. Polardarstellung für komplexe Zahlen

Peter Parczewski

Die Inhalte dieser Folge

- Polardarstellung einer komplexen Zahl

Die Inhalte dieser Folge

- Polardarstellung einer komplexen Zahl
- Additionstheoreme (Sinus/Kosinus)

Die Inhalte dieser Folge

- Polardarstellung einer komplexen Zahl
- Additionstheoreme (Sinus/Kosinus)
- Rechnen mit Polardarstellung

Die Inhalte dieser Folge

- Polardarstellung einer komplexen Zahl
- Additionstheoreme (Sinus/Kosinus)
- Rechnen mit Polardarstellung
- **Highlight**: Lösung der Gleichung $z^n = c$ für alle $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

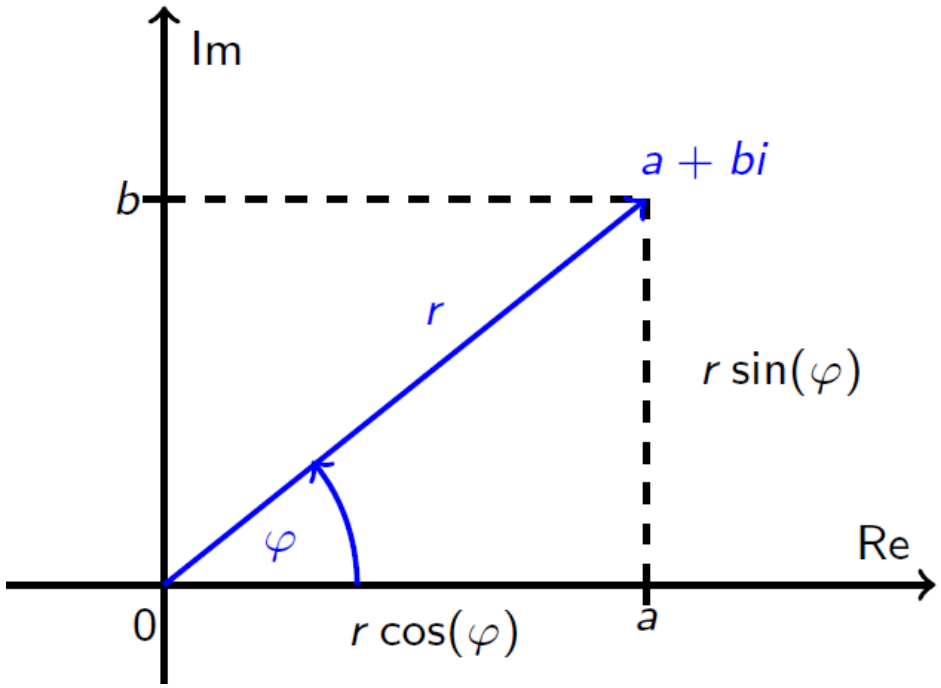
Neben der **kartesischen Darstellung** einer komplexen Zahl $z = a + bi$ in $\mathbb{C}$ haben wir eine alternative Darstellung:

Definition (Polardarstellung)

Für die Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gibt es ein eindeutiges Paar $(r, \varphi) \in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times (-\pi, \pi]$ mit

$$a = r\cos(\varphi), \quad b = r\sin(\varphi) \qquad \Leftrightarrow \quad z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Hierbei sind $r := |z| \geq 0$ der Betrag von z und $\varphi := \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ das **Argument** von z:



Additionstheoreme

Für das Rechnen mit der Polardarstellung benötigen wir:

Proposition (Additionstheoreme Sinus/Cosinus)

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Einen Beweis können wir später einfacher erhalten, hier verwenden wir zur Begründung einen eleganten Bildbeweis für den Fall $\alpha+\beta \in (0, \pi/2)$. Der allgemeine Fall läßt sich mittels Symmetrien (Periodizität von sin und cos) auf diesen Fall zurückführen:

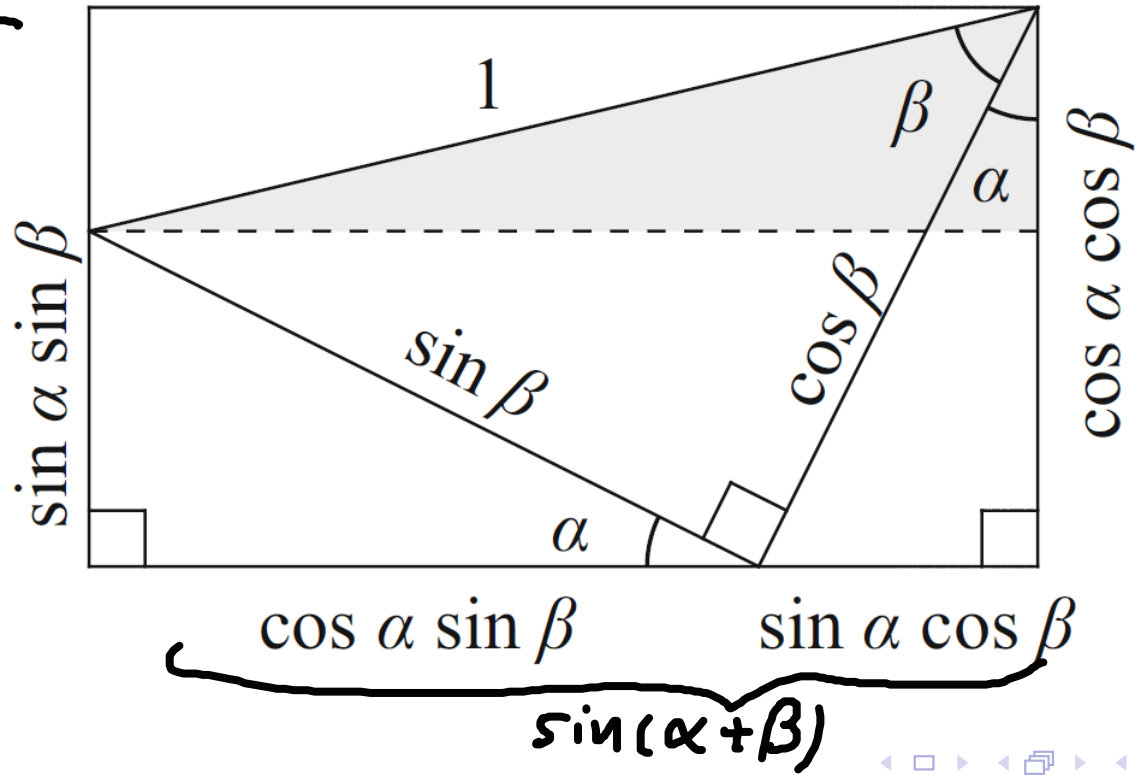
Additionstheoreme

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

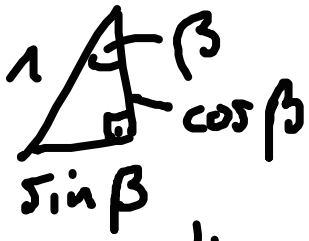
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

graues Dreieck

$\cos(\alpha+\beta)$

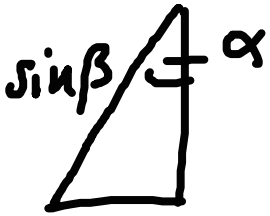


1. Schritt



2. Schritt

3. Dreieck



Formeln Euler/de Moivre

Proposition (Formeln von Euler und de Moivre)

Für die komplexen Zahlen

$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)),\ z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)),\ z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

und alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \\ z_1/z_2 &= r_1/r_2 \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \\ z^n &= r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

(Komplexe Multiplikation bei Polardarstellung: Beträge multiplizieren und Argumente addieren.)

$z = 3 + 2i = \sqrt{13}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^7 = 13^{\frac{7}{2}}(\cos(7\varphi) + i\sin(7\varphi))$

Formeln Euler/de Moivre

Proposition (Formeln von Euler und de Moivre)

Für die komplexen Zahlen

$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)),\ z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)),\ z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

und alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \\ z_1/z_2 &= r_1/r_2 \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \\ z^n &= r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

(Komplexe Multiplikation bei Polardarstellung: Beträge multiplizieren und Argumente addieren.)

So ist beispielsweise

$$z = \frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = -i = (\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$$

Formeln Euler/de Moivre

Proposition (Formeln von Euler und de Moivre)

Für die komplexen Zahlen

$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)),\ z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)),\ z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

und alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \\ z_1/z_2 &= r_1/r_2 \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \\ z^n &= r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

(Komplexe Multiplikation bei Polardarstellung: Beträge multiplizieren und Argumente addieren.)

So ist beispielsweise

$$z = \frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = -i = (\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$$

$$\Rightarrow z^3 = (-i)^3 = i = (\cos(9\pi/2) + i\sin(9\pi/2))$$

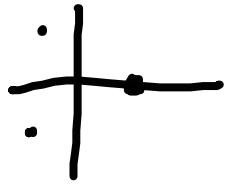
n-te Wurzeln in $\mathbb{C}$

Satz (n-te Wurzeln)

Seien $c = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Dann hat die Gleichung*

$$z^n = c$$

z.B. $z^3 = 1$



die n verschiedenen Lösungen

$$z_k = r^{1/n}(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k)), \quad \varphi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Bew: Die z_k sind echt verschieden, da Winkel φ_k verschieden um $< 2\pi$.

Und es ist mit Polardarstellung (Prop. zuvor)

$$z_k^n = r(\cos(n\varphi_k) + i\sin(n\varphi_k)) = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$$

Mit Periodizität von cos, sin

$$= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = c \quad \square$$