Analysis für Wirtschaftsinformatiker

4. Komplexe Zahlen

Peter Parczewski

Die Inhalte dieser Folge

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Die Inhalte dieser Folge

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Komplexe Konjugation

Die Inhalte dieser Folge

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Komplexe Konjugation
- Komplexe Ebene

Die Inhalte dieser Folge

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Komplexe Konjugation
- Komplexe Ebene
- Betrag und Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$

Die Inhalte dieser Folge

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Komplexe Konjugation
- Komplexe Ebene
- Betrag und Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$
- Kreise (Umgebungen) in der komplexen Ebene

Die Inhalte dieser Folge

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Komplexe Konjugation
- Komplexe Ebene
- Betrag und Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$
- Kreise (Umgebungen) in der komplexen Ebene
- **Highlight**: Gleichungen für Mengen in $\mathbb{C}$

Die bisherigen Zahlenmengen $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ hatten jeweils mehr abgeschlossene Operationen:

- $\mathbb{Z}$ ist im Gegenteil zu $\mathbb{N}$ abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existiert)
- $\mathbb{Q}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Multiplikation
- $\mathbb{R}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)

Die bisherigen Zahlenmengen $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ hatten jeweils mehr abgeschlossene Operationen:

- $\mathbb{Z}$ ist im Gegenteil zu $\mathbb{N}$ abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existiert)
- $\mathbb{Q}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Multiplikation
- $\mathbb{R}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)

Aber $\mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen bzgl. algebraischen Gleichungen: z.B. hat

$$x^2 = -1$$

$x^2 \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$

keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Die bisherigen Zahlenmengen $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ hatten jeweils mehr abgeschlossene Operationen:

- $\mathbb{Z}$ ist im Gegenteil zu $\mathbb{N}$ abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existiert)
- $\mathbb{Q}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Multiplikation
- $\mathbb{R}$ ist zudem abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)

Aber $\mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen bzgl. algebraischen Gleichungen: z.B. hat

$$x^2 = -1$$

keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Die komplexe Zahlen werden als ein solcher Abschluss von $\mathbb{R}$ definiert:

Definition (Komplexe Zahlen)

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist i die *imaginäre Einheit* mit $i^2 = -1$, so heißt der Ausdruck

$$z := a + b \cdot i = a + bi$$

eine *komplexe Zahl* mit *Realteil* a und *Imaginärteil* b, geschrieben $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ und $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$ (beide sind eindeutig!). Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Komplexe Zahlen

Definition (Komplexe Zahlen)

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist i die *imaginäre Einheit* mit $i^2 = -1$, so heißt der Ausdruck

$$z := a + b \cdot i = a + bi$$

eine *komplexe Zahl* mit *Realteil* $a = \mathrm{Re}(z)$ und *Imaginärteil* $b = \mathrm{Im}(z)$.

Wir erhalten die folgenden Rechenregeln, wobei man bei der komplexen Multiplikation vorsichtig sein muss:

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, dann gilt:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

Komplexe Zahlen

Definition (Komplexe Zahlen)

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist i die *imaginäre Einheit* mit $i^2 = -1$, so heißt der Ausdruck

$$z := a + b \cdot i = a + bi$$

eine *komplexe Zahl* mit *Realteil* $a = \mathrm{Re}(z)$ und *Imaginärteil* $b = \mathrm{Im}(z)$.

Wir erhalten die folgenden Rechenregeln, wobei man bei der komplexen Multiplikation vorsichtig sein muss:

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, dann gilt:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
- $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$

Komplexe Zahlen

Definition (Komplexe Zahlen)

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist i die *imaginäre Einheit* mit $i^2 = -1$, so heißt der Ausdruck

$$z := a + b \cdot i = a + bi$$

eine *komplexe Zahl* mit *Realteil* $a = \mathrm{Re}(z)$ und *Imaginärteil* $b = \mathrm{Im}(z)$.

Wir erhalten die folgenden Rechenregeln, wobei man bei der komplexen Multiplikation vorsichtig sein muss:

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, dann gilt:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
- $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$ (**komplexe Multiplikation**)

Komplexe Ebene

Geometrisch ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.

Komplexe Ebene

Geometrisch ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.

Komplexe Ebene

Geometrisch ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.

Damit sind die Eigenschaften erfüllt:

- $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$

Komplexe Ebene

Geometrisch ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.

Damit sind die Eigenschaften erfüllt:

- $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

Komplexe Ebene

Geometrisch ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.

Damit sind die Eigenschaften erfüllt:

- $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $\bar{\bar{z}} = z$

Komplexe Ebene

Geometrisch ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.

$$z\bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi)$$
$$= (a^2+b^2) + (-ab+ab)i$$
$$= a^2+b^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$$

Damit sind die Eigenschaften erfüllt:

- $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Aus Folie zuvor folgt

$$|z|^2 = z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|zw| = |z||w|$

Betrag

Definition (Betrag in $\mathbb{C}$)

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Somit ist der Betrag die (euklidische) Länge des Vektors in Ebene.

Offenbar gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ neben $|z| \geq 0$ die Eigenschaften:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|zw| = |z||w|$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2}$

$$\frac{1+i}{-2-3i} = \frac{(1+i)\cdot(-2+3i)}{(-2-3i)\cdot(-2+3i)} = \frac{(-2-3)+(3-2)i}{2^2+3^2}$$

Überdies ist $|z-w|$ der **geometrische (euklidische) Abstand** der Punkte z und w und es gilt erneut:

Proposition (Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$)

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \quad \text{sowie} \quad ||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

<u>Bew</u>: Es ist

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$$
$$= z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w}$$
$$= |z|^2 + w\bar{z} + z\bar{w} + |w|^2 \quad (1)$$

[Kleine Wiederholung
Δ-Ungl. in $\mathbb{R}$
benutzt: $x \leq |x|$

Mit $\overline{(w\bar{z})} = \bar{w}\bar{\bar{z}} = z\bar{w}$ und $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ist
$w\bar{z} + z\bar{w} = 2\,\mathrm{Re}(w\bar{z})$ und daher mit $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$
auch $w\bar{z} + z\bar{w} \leq 2|z\bar{w}| = 2|z||w|$. Somit folgt aus (1):
$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(w\bar{z}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$
$= (|z| + |w|)^2$ ☺ Rest analog ☺ $\square$

$\mathbb{C}$ ist nicht geordnet

Die komplexen Zahlen sind nicht mehr angeordnet. Aus den Ordnungsaxiomen folgte, dass jedes Quadrat eine nichtnegative Zahl ist (Erinnerung: $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Aber es ist beispielsweise $i^2 = -1 < 0$!

$\mathbb{C}$ ist nicht geordnet

Die komplexen Zahlen sind nicht mehr angeordnet. Aus den Ordnungsaxiomen folgte, dass jedes Quadrat eine nichtnegative Zahl ist (Erinnerung: $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Aber es ist beispielsweise $i^2 = -1 < 0$!

Nur die Beträge der komplexen Zahlen lassen sich anordnen.

$\mathbb{C}$ ist nicht geordnet

Die komplexen Zahlen sind nicht mehr angeordnet. Aus den Ordnungsaxiomen folgte, dass jedes Quadrat eine nichtnegative Zahl ist (Erinnerung: $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Aber es ist beispielsweise $i^2 = -1 < 0$!

Nur die Beträge der komplexen Zahlen lassen sich anordnen.

Es gelten weiterhin alle Eigenschaften, die nur von Körpereigenschaften Gebrauch machen. Beispielsweise folgen völlig analog wie in $\mathbb{R}$ ebenso:

Proposition (Geometrische Summe + Binomialsatz in $\mathbb{C}$)

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}, \qquad (z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}.$$

Gleichungen in $\mathbb{C}$ - Fundamentalsatz der Algebra

In den komplexen Zahlen lassen sich nun alle **quadratischen Gleichungen** lösen:

Gleichungen in $\mathbb{C}$ - Fundamentalsatz der Algebra

In den komplexen Zahlen lassen sich nun alle **quadratischen Gleichungen** lösen:

- Sei $z^2 + 3 = 0$: Dann ist $z^2 = -3$, also $z_{1,2} = \cancel{\sqrt{0} \pm \sqrt{-1}} = \pm\sqrt{3}\, i$

$i^2 = -1$

Gleichungen in $\mathbb{C}$ - Fundamentalsatz der Algebra

In den komplexen Zahlen lassen sich nun alle **quadratischen Gleichungen** lösen:

- Sei $z^2 + 3 = 0$: Dann ist $z^2 = -3$, also $z_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}\,i$
- Sei $z^2 - 8z + 20 = 0$: Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir $(z-4)^2 = -4$. Also sind die Lösungen gegeben durch $z_{1,2} = 4 \pm 2i$

Gleichungen in $\mathbb{C}$ - Fundamentalsatz der Algebra

In den komplexen Zahlen lassen sich nun alle **quadratischen Gleichungen** lösen:

- Sei $z^2 + 3 = 0$: Dann ist $z^2 = -3$, also $z_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}\,i$
- Sei $z^2 - 8z + 20 = 0$: Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir $(z-4)^2 = -4$. Also sind die Lösungen gegeben durch $z_{1,2} = 4 \pm 2i$

Gleichungen in $\mathbb{C}$ - Fundamentalsatz der Algebra

In den komplexen Zahlen lassen sich nun alle **quadratischen Gleichungen** lösen:

- Sei $z^2 + 3 = 0$: Dann ist $z^2 = -3$, also $z_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}\,i$
- Sei $z^2 - 8z + 20 = 0$: Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir $(z-4)^2 = -4$. Also sind die Lösungen gegeben durch $z_{1,2} = 4 \pm 2i$

Es gilt sogar allgemeiner:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante Polynom besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle: Für komplexe Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.

Für den Beweis fehlen uns die Werkzeuge. Wir beweisen aber später im Kapitel einen Spezialfall.

Kreise (Umgebungen)

Das Pendant zu Intervallen in den reellen Zahlen sind Kreisflächen in der komplexen Ebene.

Definition (Kreise/Umgebungen)

- Ein **offener Kreis (offene Umgebung)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch

$$\mathcal{U}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Kreise (Umgebungen)

Das Pendant zu Intervallen in den reellen Zahlen sind Kreisflächen in der komplexen Ebene.

Definition (Kreise/Umgebungen)

- Ein **offener Kreis (offene Umgebung)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch
$$\mathcal{U}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$
- Ein **abgeschlossener Kreis (abgeschlossener Ball)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch
$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Kreise (Umgebungen)

Das Pendant zu Intervallen in den reellen Zahlen sind Kreisflächen in der komplexen Ebene.

Definition (Kreise/Umgebungen)

- Ein **offener Kreis (offene Umgebung)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch
$$\mathcal{U}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$
- Ein **abgeschlossener Kreis (abgeschlossener Ball)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist gegeben durch
$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$
- Ein **Kreisrand (Sphäre)** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist
$$S_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Generell lassen sich viele geometrisch interessante Teilmengen der komplexen Zahlen nun mittels Realteil, Imaginärteil oder Betrag charakterisieren. Wir geben einige Beispiele:

Generell lassen sich viele geometrisch interessante Teilmengen der komplexen Zahlen nun mittels Realteil, Imaginärteil oder Betrag charakterisieren. Wir geben einige Beispiele:

Die Menge

$$A := \{z : \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(2z) > 0\}$$

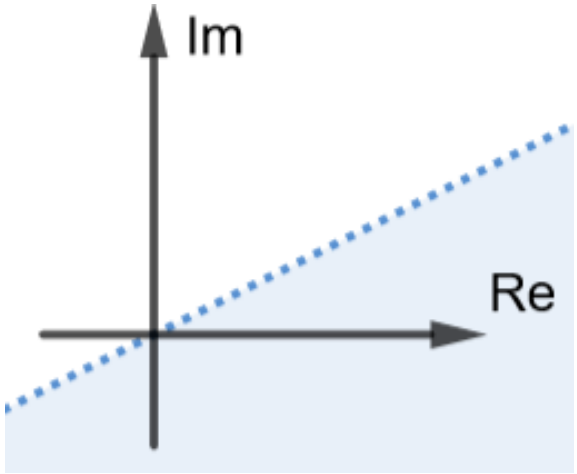
ist charakterisiert durch $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(2z) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Re}(z)/2$,
d.h. es handelt sich bei A um eine *Halbebene ohne Rand*.

Generell lassen sich viele geometrisch interessante Teilmengen der komplexen Zahlen nun mittels Realteil, Imaginärteil oder Betrag charakterisieren. Wir geben einige Beispiele:

Die Menge

$$A := \{z : \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(2z) > 0\}$$

ist charakterisiert durch $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(2z) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Re}(z)/2$,
d.h. es handelt sich bei A um eine *Halbebene ohne Rand*.



Die Menge

$$B := \{z : \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{10}|\operatorname{Re}(z)|\}$$

ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2 \leq 10 \operatorname{Re}(z)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{Im}(z)^2 \leq 9 \operatorname{Re}(z)^2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(z)| \leq 3|\operatorname{Re}(z)|. \end{aligned}$$

Also ist B ein *beidseitig unendlicher Kegel mit Rand*.

$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$

$|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$

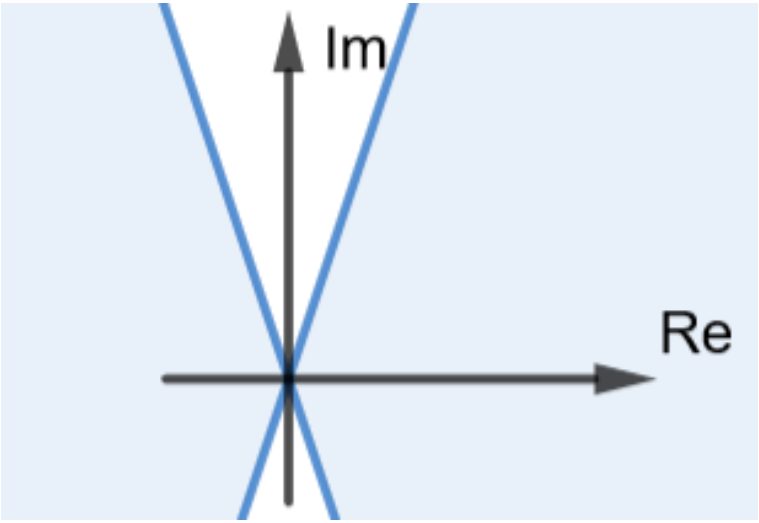
Die Menge

$$B := \{z : \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{10}|\operatorname{Re}(z)|\}$$

ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2 \leq 10 \operatorname{Re}(z)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{Im}(z)^2 \leq 9 \operatorname{Re}(z)^2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(z)| \leq 3|\operatorname{Re}(z)|. \end{aligned}$$

Also ist B ein *beidseitig unendlicher Kegel mit Rand*.



Die Menge

$$C := \{z : \mathbb{C} : \mathrm{Im}(1/z) = 1\}$$

ist mittels $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ charakterisiert durch

$$\mathrm{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z})}{|z|^2} = \frac{-\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = 1 \;\Leftrightarrow 0 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 + \mathrm{Im}(z).$$

Die Menge

$$C := \{z : \mathbb{C} : \mathrm{Im}(1/z) = 1\}$$

ist mittels $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ charakterisiert durch

$$\mathrm{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z})}{|z|^2} = \frac{-\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = 1 \;\Leftrightarrow 0 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 + \mathrm{Im}(z).$$

Quadratische Ergänzung ergibt

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)^2 + (\mathrm{Im}(z) + 1/2)^2 = (1/2)^2 \Leftrightarrow |z - (-i/2)|^2 = (1/2)^2.$$

Das ist genau die Formel für den *Kreisrand*, also ist $C = S_{1/2}(-i/2)$.

Die Menge

$$C := \{z : \mathbb{C} : \mathrm{Im}(1/z) = 1\}$$

ist mittels $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ charakterisiert durch

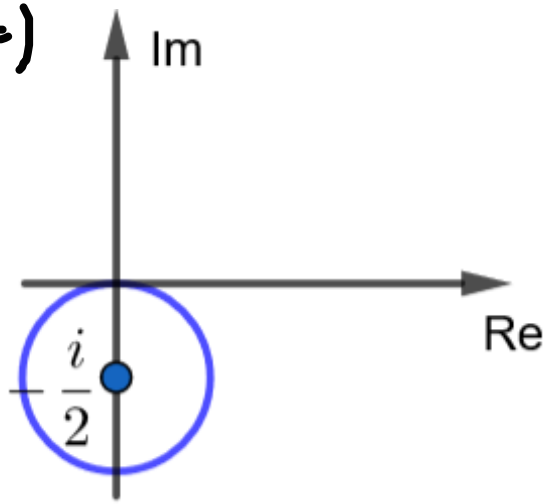
$$\mathrm{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z})}{|z|^2} = \frac{-\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = 1 \;\Leftrightarrow 0 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 + \mathrm{Im}(z).$$

Quadratische Ergänzung ergibt

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)^2 + (\mathrm{Im}(z) + 1/2)^2 = (1/2)^2 \Leftrightarrow |z - (-i/2)|^2 = (1/2)^2.$$

Das ist genau die Formel für den *Kreisrand*, also ist $C = S_{1/2}(-i/2)$.

$\mathrm{Re}(a z) = a\,\mathrm{Re}(z)$

$a \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(a z) = a\,\mathrm{Im}(z)$