Analysis für Wirtschaftsinformatiker

12. Stetigkeit

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Die Inhalte dieser Folge

- Stetigkeit

Die Inhalte dieser Folge

- Stetigkeit
- Stetigkeitsregeln (Limesregeln, Komposition, Inverse)

Die Inhalte dieser Folge

- Stetigkeit
- Stetigkeitsregeln (Limesregeln, Komposition, Inverse)
- Stetigkeit Potenzreihe

Die Inhalte dieser Folge

- Stetigkeit
- Stetigkeitsregeln (Limesregeln, Komposition, Inverse)
- Stetigkeit Potenzreihe
- Uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$

Die Inhalte dieser Folge

- Stetigkeit
- Stetigkeitsregeln (Limesregeln, Komposition, Inverse)
- Stetigkeit Potenzreihe
- Uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$
- **Highlight**: Viele Beispiele

Wir betrachten nur reelle Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ für eine Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Alle Begriffe und Werkzeuge der Stetigkeit lassen sich analog für komplexe Funktionen einführen.

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt:

- **stetig in** $x \in D_f$, falls für jede Folge $(x_n) \subset D_f$ mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$.
  Ansonsten heißt die Funktion **unstetig in** x.
- **stetig in/auf** D_f, falls sie stetig ist für alle $x \in D_f$.
- **rechts– bzw. linksseitig stetig in** $x \in D_f$, falls für jede Folge $(x_n) \subset D_f$ mit $x_n > x, x_n \to x$ (wir schreiben $x_n \searrow x$) bzw. $x_n < x, x_n \to x$ (wir schreiben $x_n \nearrow x$) gilt $f(x_n) \to f(x)$.

Wir schreiben für den **Grenzwert** von $f(x_n)$ für jede Folge $x_n \to x_0$ auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{bzw. bei einseitigen Grenzwert} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

Genauer ist Stetigkeit also eine höchst lokale Eigenschaft, denn die Stetigkeit in einem Punkt hat keinen Einfluß auf die Stetigkeit in einem anderen Punkt.

Stetigkeitsregeln

Mit den Limesregeln erhalten wir direkt:

Lemma (Limesregeln für Funktionen)

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$, so gelten auch die Stetigkeiten in x von:

- $|f|$ *(Betrag)*
- $f + g$ *(Summe)*
- $f \cdot g$ *(Produkt)*
- *Falls* $g(x) \neq 0 \; : \; f/g$ *(Quotient)*

Ebenso folgen für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ all diese Stetigkeiten von $|f|, f + g, f \cdot g$ und f/g (mit eventuell kleinerer Definitionsmenge $D_{f/g} \subset D$!)

Stetigkeitsregeln

Mit den Limesregeln erhalten wir direkt:

Lemma (Limesregeln für Funktionen)

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$, so gelten auch die Stetigkeiten in x von:

- $|f|$ *(Betrag)*
- $f + g$ *(Summe)*
- $f \cdot g$ *(Produkt)*
- *Falls* $g(x) \neq 0 \ : \ f/g$ *(Quotient)*

Ebenso folgen für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ all diese Stetigkeiten von $|f|, f + g, f \cdot g$ und f/g (mit eventuell kleinerer Definitionsmenge $D_{f/g} \subset D$!)

- Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall stetig, ebenso stetig auf jeder Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.

Stetigkeitsregeln

Mit den Limesregeln erhalten wir direkt:

Lemma (Limesregeln für Funktionen)

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$, so gelten auch die Stetigkeiten in x von:

- $|f|$ *(Betrag)*
- $f + g$ *(Summe)*
- $f \cdot g$ *(Produkt)*
- *Falls* $g(x) \neq 0$: f/g *(Quotient)*

Ebenso folgen für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ all diese Stetigkeiten von $|f|, f + g, f \cdot g$ und f/g (mit eventuell kleinerer Definitionsmenge $D_{f/g} \subset D$!)

- Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall stetig, ebenso stetig auf jeder Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Jede rationale Funktion $r(x) = f(x)/g(x)$ ist überall stetig auf der Definitionsmenge $D_r = \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : g(y) = 0\}$.

Uneigentlicher Grenzwert

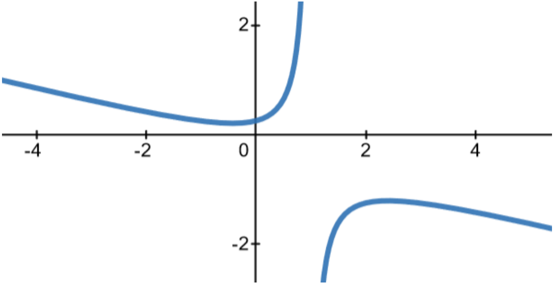
Definition (Uneigentlicher Grenzwert)

Für eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt:

- ∞ bzw. $-\infty$ **uneigentlicher Grenzwert**, falls $f(x) \nearrow \infty$ bzw. $f(x) \searrow -\infty$ für $x \to x_0$ $(\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty)$. D.h. f ist **unbeschränkt für** $x \to x_0$
- $x_0 \in D_f$ **Polstelle ohne Vorzeichenwechsel**, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (oder $= -\infty$)
- $x_0 \in D_f$ **Polstelle mit Vorzeichenwechsel**, falls $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = -\infty$ (oder beides umgekehrt)
- f in $x_0 \notin D_f$ **stetig fortsetzbar**, falls $\lim\limits_{x \to x_0, x \in D_f} f(x_n)$ existiert (und ist eindeutig!)

Beispiele

- Es ist für die rationale Funktion $r(x) = \dfrac{x^2+1}{4(1-x)}$



beispielsweise

$$\lim_{x\to 2} r(x) = r(2) \quad \text{und analog für alle} \quad x_0 \neq 1 \;:\; \lim_{x\to x_0} r(x) = r(x_0),$$

sowie an der Polstelle **mit Vorzeichenwechsel**:

$$\lim_{x\searrow 1} r(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\nearrow 1} r(x) = \infty$$

Beispiele

- Mit Stetigkeit Limesregeln ist:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{|x| + x^3}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x + x^3}{x} = \lim_{x \searrow 0} (1 + x^2) = 1,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| + x^3}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x + x^3}{x} = \lim_{x \nearrow 0} (-1 + x^2) = -1$$

Beispiele

- Mit Stetigkeit Limesregeln ist:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{|x| + x^3}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x + x^3}{x} = \lim_{x \searrow 0} (1 + x^2) = 1,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| + x^3}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x + x^3}{x} = \lim_{x \nearrow 0} (-1 + x^2) = -1$$

- Es gilt $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

Beispiele

- Mit Stetigkeit Limesregeln ist:

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{|x| + x^3}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x + x^3}{x} = \lim_{x\searrow 0} (1 + x^2) = 1,$$

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{|x| + x^3}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{-x + x^3}{x} = \lim_{x\nearrow 0} (-1 + x^2) = -1$$

- Es gilt $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.
  Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ und $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist also mit $x \to 0$:

$$-\infty \leftarrow (-\varepsilon - 1)/x^2 \leq f(x) \leq (\varepsilon - 1)/x^2 \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Beispiele

- Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x\,, & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 + \alpha^2\,, & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$
ist für alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da Polynome. Wegen den einseitigen Grenzwerten
$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^2 + \alpha^2) = \alpha^2, \qquad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (1 + \alpha x) = 1$$
ist die Funktion nur für $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ stetig fortsetzbar, d.h. hier stetig. Ansonsten hat die Funktion in 0 einseitig verschiedene Grenzwerte.

Stetigkeitsregeln

Satz (**Stetigkeitsregeln**)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:

- *Für $g : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig.* (Stetigkeit der Komposition)
- *Jede Potenzreihe ist stetig im Konvergenzradius.* (Stetigkeit der Potenzreihe)
- *Für f injektiv ist die Inverse $f^{-1} : f(D) \to D$ auch stetig.* (Stetigkeit Inverse)

Beispiele

- Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind überall stetig (Potenzrehen).

Beispiele

- Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind überall stetig (Potenzrehen).
- Die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, ln, $\arcsin, \arccos, \arctan$ sind stetig auf den Definitionsbereichen (Stetigkeit der Inversen).

Beispiele

- Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind überall stetig (Potenzrehen).
- Die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$, ln, $\arcsin, \arccos, \arctan$ sind stetig auf den Definitionsbereichen (Stetigkeit der Inversen).
- Mittels Komposition und $c^x = e^{x \ln(c)}$ für $c > 0$ sind auch diese Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$:
$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad g(x) = \frac{|\cos(x)|^3}{1+x^2}$$

Beispiele

- Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind überall stetig (Potenzrehen).
- Die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$, ln, $\arcsin, \arccos, \arctan$ sind stetig auf den Definitionsbereichen (Stetigkeit der Inversen).
- Mittels Komposition und $c^x = e^{x \ln(c)}$ für $c > 0$ sind auch diese Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad g(x) = \frac{|\cos(x)|^3}{1 + x^2}$$

$$h(x) = (\ln(|x| + 1/2))^{1/3}, \qquad k(x) = 2^{x^3 - |x|}$$

Beispiele

- Die Funktion $f(x) = e^{1/x}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (Abbildung) ist stetig mit

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow \lim_{x \searrow 0} e^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \nearrow 0} e^{1/x} = 0$$

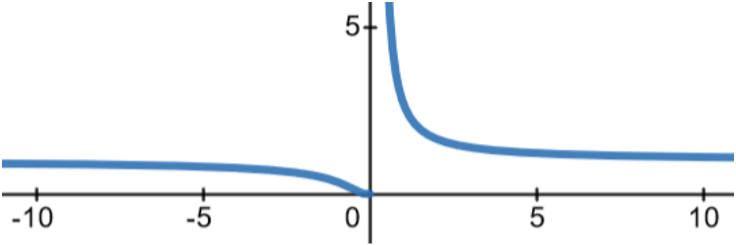


Abbildung: Funktion $f(x) = e^{1/x}$ mit rechtsseitiger Polstelle in 0

Beispiele

- Die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$, $f : D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist überall auf D_f stetig, aber nicht stetig fortsetzbar in 0, da $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ nicht existiert, siehe Abbildung: Es ist beispielsweise für die Nullfolgen $x_n = 1/(2\pi n), y_n = 1/(2\pi n + \pi/2)$:

$$f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0, \qquad f(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$$

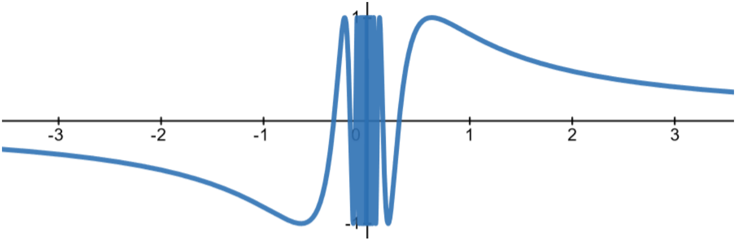


Abbildung: Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ nicht stetig fortsetzbar in 0

Beispiele

- Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist überall unstetig, denn mit der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ Folgen $(q_n) \subset \mathbb{Q}$, $(r_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_n \to x, r_n \to x$ und daher

$$f(q_n) = 1 \to 1 \neq 0 \leftarrow 0 = f(r_n).$$

ε-δ-Kriterium der Stetigkeit

Eine reelle Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D_f$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in D_f \text{ und } |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

In Abbildung

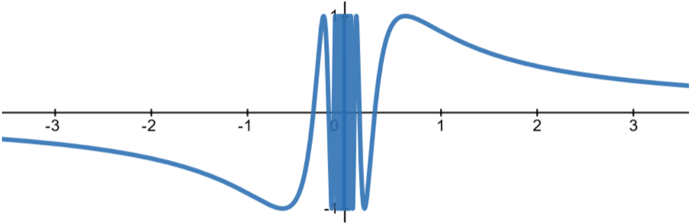


Abbildung: Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ nicht stetig fortsetzbar in 0

sehen wir direkt, wie dieses Kriterium verletzt ist, z.B. für ein $\varepsilon < 1/2$.