Analysis für Wirtschaftsinformatiker

10. Konvergenz von Reihen

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen
- Absolute Konvergenz

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen
- Absolute Konvergenz
- Majorante und Minorante (Majorantenkriterium)

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen
- Absolute Konvergenz
- Majorante und Minorante (Majorantenkriterium)
- Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen:

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen
- Absolute Konvergenz
- Majorante und Minorante (Majorantenkriterium)
- Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen:

  es genügt Nachweis bis auf endlich viele Summenglieder!

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen
- Absolute Konvergenz
- Majorante und Minorante (Majorantenkriterium)
- Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen:

  es genügt Nachweis bis auf endlich viele Summenglieder!
- Wurzelkriterium und Quotientenkriterium

Die Inhalte dieser Folge

- Reihen
- Absolute Konvergenz
- Majorante und Minorante (Majorantenkriterium)
- Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen:

  es genügt Nachweis bis auf endlich viele Summenglieder!
- Wurzelkriterium und Quotientenkriterium
- **Highlight**: Viele Beispiele für konvergente und divergente Reihen

Konvergenz von Reihen

Definition (Konvergenz Reihe)

Folgen besonderer Art $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen **Reihen**. Die Elemente $\sum_{k=1}^{n} a_n$ heißen **Partialsummen** und die Reihe wird dargestellt als unendliche Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Eine Reihe heißt **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen konvergiert. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt **Wert** der Reihe. Konvergiert die Reihe nicht, so heißt sie **divergent**.

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Reihe als auch den Grenzwert (falls vorhanden)!

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Reihe als auch den Grenzwert (falls vorhanden)!
- Natürlich sind auch andere Indexmengen möglich wie z.B. $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Reihe als auch den Grenzwert (falls vorhanden)!
- Natürlich sind auch andere Indexmengen möglich wie z.B. $\sum_{n \geq 0} a_n$.
- Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist auch als Reihe darstellbar: $\displaystyle a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n$.

Konvergenz von Reihen: Beispiel

Erstes Beispiel

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$:

Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend.

Konvergenz von Reihen: Beispiel

Erstes Beispiel

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right):$$

Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend.

Mittels $k^2 > k(k-1) \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ und **Teleskopsumme** ist die Folge auch beschränkt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

Konvergenz von Reihen: Beispiel

Erstes Beispiel

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right):$$

Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend.

Mittels $k^2 > k(k-1) \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ und **Teleskopsumme** ist die Folge auch beschränkt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

Der Satz über monotone Konvergenz liefert also die Konvergenz der Reihe.

Konvergenz von Reihen: Beispiel

Erstes Beispiel

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$:

Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend.

Mittels $k^2 > k(k-1) \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ und **Teleskopsumme** ist die Folge auch beschränkt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

Der Satz über monotone Konvergenz liefert also die Konvergenz der Reihe.

Der genaue Wert ist zudem interessant: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Nullfolgenkriterium und geometrische Reihe

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz ist die Nullfolge der Summenglieder:

Proposition (Nullfolgenkriterium)

Für eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist*

$$a_n \to 0.$$

Nullfolgenkriterium und geometrische Reihe

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz ist die Nullfolge der Summenglieder:

Proposition (Nullfolgenkriterium)

Für eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist*

$$a_n \to 0.$$

Geometrische Reihe

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \text{ für } |z| < 1 \right)$: Mit der geometrischen Summe, der geometrischen Folge $z^n \to 0$ und Limesregeln ist für alle $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Nullfolgenkriterium und geometrische Reihe

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz ist die Nullfolge der Summenglieder:

Proposition (Nullfolgenkriterium)

Für eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist*

$$a_n \to 0.$$

Geometrische Reihe

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \text{ für } |z| < 1\right)$: Mit der geometrischen Summe, der geometrischen Folge $z^n \to 0$ und Limesregeln ist für alle $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Für $|z| \geq 1$ ist das Nullfolgenkriterium verletzt und die Reihe somit **divergent**.

Reihen: Wichtige Beispiele

Die Nullfolge der Glieder ist jedoch nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe:

Harmonische Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist divergent} \right):$$

Reihen: Wichtige Beispiele

Die Nullfolge der Glieder ist jedoch nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe:

Harmonische Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist divergent}\right):$$

Diese Reihe divergiert (aber extrem langsam)! Es gilt z.B.

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

Reihen: Wichtige Beispiele

Die Nullfolge der Glieder ist jedoch nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe:

Harmonische Reihe

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist divergent}\right)$:

Diese Reihe divergiert (aber extrem langsam)! Es gilt z.B.

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

Analog folgt (mit Induktion) :

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

was eine unbeschränkte Teilfolge der Partialsummen ist. Damit folgt die Divergenz.

Absolute Konvergenz

Definition (Absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn Ihre **Absolutreihe** $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Absolute Konvergenz

Definition (Absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn Ihre **Absolutreihe** $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz (**Satz über absolute Konvergenz**)

Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gilt die Äquivalenz:

$$\text{absolut konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist beschränkt}$$

Für absolut konvergente Reihe gilt die Dreiecksungleichung $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Leibniz-Kriterium

- Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, Aber nicht umgekehrt:

Proposition (Leibniz-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Leibniz-Kriterium

- Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, Aber nicht umgekehrt:

Proposition (Leibniz-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die* alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beispielsweise ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ konvergent aber nicht absolut konvergent!

Die Absolutreihe ist hier die harmonische Reihe.

Satz (**Majorantenkriterium**)

Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente* Majorante, *d.h. eine konvergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \;\; : \quad |a_n| \leq b_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Satz (**Majorantenkriterium**)

Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente* Majorante, *d.h. eine konvergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \ : \quad |a_n| \leq b_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Satz (**Minorantenkriterium**)

Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine divergente* Minorante, *d.h. eine divergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \ : \quad 0 \leq b_n \leq a_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Satz (**Majorantenkriterium**)

Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente* Majorante, *d.h. eine konvergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \quad : \quad |a_n| \leq b_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Satz (**Minorantenkriterium**)

Besitzt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine divergente* Minorante, *d.h. eine divergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *mit*

$$\text{für alle } n \geq 1 \quad : \quad 0 \leq b_n \leq a_n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beachte: In beiden Resultaten sowie allen Konvergenz- bzw. Divergenzkriterien genügt die Bedingung auch jeweils nur

für alle bis auf endlich viele (d.h. für fast alle) Summenglieder,

da sich die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe durch das Verändern endlich vieler Glieder nicht ändert!

Reihen: Beispiele

- Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$ ist absolut konvergent mit der konvergenten Absolutreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Reihen: Beispiele

- Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$ ist absolut konvergent mit der konvergenten Absolutreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.
- Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(k\sqrt{\pi})}{k}\right)^k$ ist absolut konvergent aufgrund der **Majorante**:

$$\text{für alle } k \geq 2\ :\ \left|\left(\frac{\sin(k\sqrt{\pi})}{k}\right)^k\right| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Reihen: Beispiele

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$ ist absolut konvergent mit der konvergenten Absolutreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(k\sqrt{\pi})}{k}\right)^k$ ist absolut konvergent aufgrund der **Majorante**:

$$\text{für alle } k \geq 2 \ : \ \left|\left(\frac{\sin(k\sqrt{\pi})}{k}\right)^k\right| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent aufgrund $\sqrt{k} \leq k \Rightarrow \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ und der divergenten **Minorante** Harmonische Reihe.

Wurzelkriterium

Satz (**Wurzelkriterium**)

Konvergiert die Folge $|a_n|^{1/n} \to Q < 1$, *so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*
Besitzt die Folge $|a_n|^{1/n}$ *einen Häufungspunkt* > 1, *so divergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Wurzelkriterium

Satz (**Wurzelkriterium**)

Konvergiert die Folge $|a_n|^{1/n} \to Q < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Besitzt die Folge $|a_n|^{1/n}$ einen Häufungspunkt > 1, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Ganz ähnlich folgt mit Majorantenkriterium auch:

Satz (**Quotientenkriterium**)

Gilt $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Folge $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to Q < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Konvergiert die Folge $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ gegen $q > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Reihen: Beispiele

- Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n = z + 2^p z^2 + \cdots$ absolut konvergent: Mit Limesregeln (Produkt), dem Grenzwert $\sqrt[n]{n} \to 1$ ist die Bedingung für das Wurzelkriterium erfüllt:

$$|n^p z^n|^{1/n} = n^{p/n}|z| = |z| \left(\sqrt[n]{n}\right)^p \to |z| < 1.$$

Also folgt mit Wurzelkriterium die absolute Konvergenz.

Reihen: Beispiele

- Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n = z + 2^p z^2 + \cdots$ absolut konvergent: Mit Limesregeln (Produkt), dem Grenzwert $\sqrt[n]{n} \to 1$ ist die Bedingung für das Wurzelkriterium erfüllt:

$$|n^p z^n|^{1/n} = n^{p/n}|z| = |z| \left(\sqrt[n]{n}\right)^p \to |z| < 1.$$

  Also folgt mit Wurzelkriterium die absolute Konvergenz.

- Wir erhalten überdies aus der Konvergenz der obigen Reihe und dem Nullfolgenkriterium für jedes $p \in \mathbb{N}$, $|z| < 1$ den Grenzwert und daher die Asymptotik:

$$\text{für alle } p \in \mathbb{N}, |z| < 1 \ : \quad n^p z^n \to 0$$

$$\text{für alle } p, m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \ : \quad n^p = o(m^n)$$

$$(\text{z.B.} \quad n^{10} = o(2^n))$$

Reihen: Beispiele

- Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

absolut konvergent:

Reihen: Beispiele

- Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$
absolut konvergent:
Wir verwenden das Quotientenkriterium: Die Bedingung ist wegen
$$\frac{\left|z^{n+1}/(n+1)!\right|}{|z^n/n!|} = |z| \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt, also folgt mit Quotientenkriterium die absolute Konvergenz.

Reihen: Beispiele

- Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$
absolut konvergent:
Wir verwenden das Quotientenkritierium: Die Bedingung ist wegen
$$\frac{\left|z^{n+1}/(n+1)!\right|}{|z^n/n!|} = |z| \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt, also folgt mit Quotientenkriterium die absolute Konvergenz.
- Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n + 2n^3 + 10}$$
ist konvergent aufgrund einer geometrischen Reihe als Majorante:
$$\frac{3}{3^n + 2n^3 + 10} < \frac{3}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}.$$

Reihen: Beispiele

- Die **Konvergenz der Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ **für** $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ läßt sich mit Wurzelfunktion und Quotientenkriterium nicht entscheiden:

$$|n^{-k}|^{1/n} = (\sqrt[n]{n})^{-k} \to 1, \qquad \frac{|(n+1)^{-k}|}{|n^{-k}|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^k \to 1.$$

Reihen: Beispiele

- Die **Konvergenz der Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ **für** $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ läßt sich mit Wurzelfunktion und Quotientenkriterium nicht entscheiden:

$$|n^{-k}|^{1/n} = (\sqrt[n]{n})^{-k} \to 1, \qquad \frac{|(n+1)^{-k}|}{|n^{-k}|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^k \to 1.$$

Mittels dem Majorantenkriterium und unserem ersten Beispiel einer konvergenten Reihe

$$n^k \geq n^2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

erhalten wir allerdings für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Reihen: Beispiele

- Die **Konvergenz der Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ **für** $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ läßt sich mit Wurzelfunktion und Quotientenkriterium nicht entscheiden:

$$|n^{-k}|^{1/n} = (\sqrt[n]{n})^{-k} \to 1, \qquad \frac{|(n+1)^{-k}|}{|n^{-k}|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^k \to 1.$$

Mittels dem Majorantenkriterium und unserem ersten Beispiel einer konvergenten Reihe

$$n^k \geq n^2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

erhalten wir allerdings für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Beachte: Wurzel- und Quotientenkriterium sind nützlich, aber zuweilen ungenügend (s.o.). Oftmals ist es ohnehin einfacher, Reihen mittels Umformungen und Abschätzungen mit einfacheren/bekannten Reihen und Majoranten bzw. Minoranten zu untersuchen!