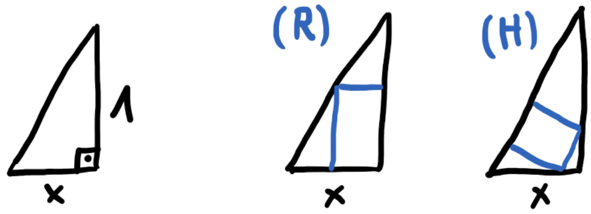
Teamwettbewerb - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (2+4+4+2 Punkte)

Sei stets ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen 1 und $0 < x \leq 1$. Wir untersuchen maximale Quadrate und Rechtecke, die wir in das Dreieck legen können, entweder rechteckig (R) eingelegt oder an die Hypotenuse angelegt (H), siehe Skizze:



(a) Zeige, dass ein maximales Quadrat (R) die Seitenlänge $a(x) = \dfrac{x}{1+x}$ besitzt.

(b) Bestimme und begründe das Seitenverhältnis (kürzere Seite : längere Seite) des maximalen Rechtecks (R) und (H) in Abhängigkeit von $0 < x \leq 1$.

(c) Beweise, dass für jedes $0 < x \leq 1$ das maximale Quadrat (R) größer als das maximale Quadrat (H) ist.

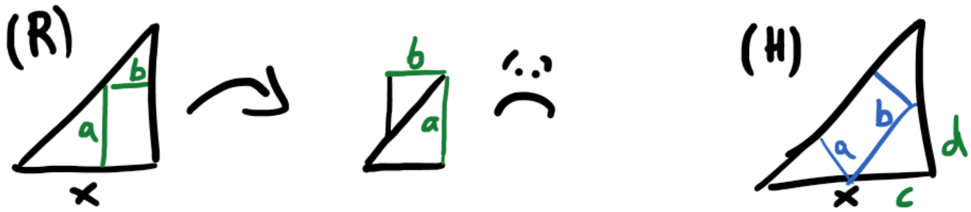
(d) Skizziere und begründe jeweils das größte eingelegte Rechteck mit Seitenverhältnis $2 : 1$ für ein Dreieck mit $x = 1$ und für ein Dreieck mit $x = 1/2$.

Lösung (a) Mit Ähnlichkeit der Dreiecke, siehe Skizze:

ist

$$(x-a)/a = x/1 \Leftrightarrow x - a = xa \Leftrightarrow a(1+x) = x \Leftrightarrow a = \frac{x}{1+x}$$

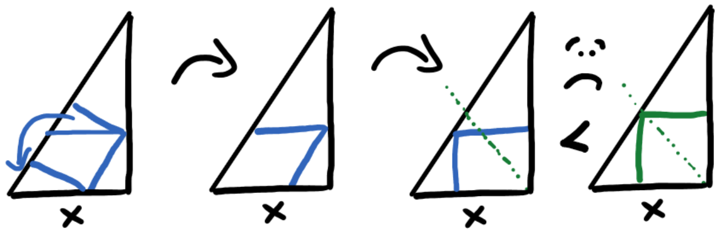
(b) Für (R) ist es $x : 1$. Heuristisch: Nur dann nimmt das Rechteck halbe Fläche des Dreiecks ein, denn ansonsten ergibt der Rest des Dreiecks eine echt größere Fläche, siehe Skizze:



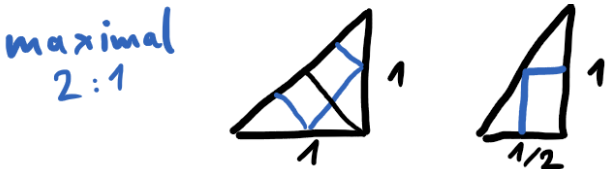
Analytisch: Seien die Seiten des Rechtecks a und b, so ist mit Ähnlichkeit der Dreiecke, (Skizze) $(x-b)/a = x$. Also ist die Fläche $ab = (x-b)b/x$ bzgl. b eine nach unten geöffnete Parabel und maximal in $b = x/2$. Somit $a = 1/2$ und das Seitenverhältnis $b : a = x : 1$.
Interessant: Insbesondere wird ein Rechteck kleiner, wenn der Eckpunkt auf der Hypotenuse von der Mitte nach unten oder oben wandert!
Die Hypotenuse im großen Dreieck hat mit Pythagoras die Länge $\sqrt{1+x^2}$. Für (H) seien die Seitenlängen $a < b$, so ist mit Ähnlichkeit der Dreiecke (Skizze oben) $a/(x-c) = x/\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow a = x(x-c)/\sqrt{x^2+1}$ sowie $b/\sqrt{x^2+1} = c/x \Leftrightarrow b = c\sqrt{x^2+1}/x$. Die Fläche des Rechtecks $a \cdot b = c(x-c)$ (aha, die bekannte Parabel!) wird in $c = x/2$ maximal. Dies ergibt das Seitenverhältnis

$$a : b = \sqrt{x^2+1}(x/2) : \ \sqrt{x^2+1}/2 = x : 1$$

(c) Heuristisch: Das Quadrat (H) ist flächengleich zu einem Rechteck, welches nach (b) eine kleinere Fläche besitzt als Quadrat (R) (Fläche Trapez: Seite mal Höhe). Siehe Skizze:

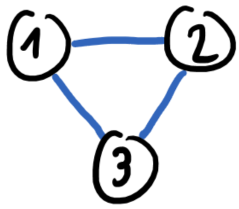


Das Quadrat (H) ist flächengleich zum Trapez, dessen Seite auf der Seite x aufliegt. Dieses Trapez ist flächengleich zum Rechteck (R), dessen Eckpunkt auf der Hypotenuse stets unterhalb der Ecke des Quadrates (R) liegt, da bei Quadrat (H) $a < d$. Die Fläche des Rechtecke (R) mit Eckpunkt unterhalb der halben Hypotenuse wird kleiner (siehe auch (b)), daher ist das Quadrat (R) stets größer als das Quadrat (H).
Analytische Lösung: Seitenlänge Quadrat (H) bestimmen ($\rightsquigarrow$ **Mathe-AG**).
(d) Mittels (b) und (c) ist für $x = 1$ das Rechteck (H) stets größer als Rechteck (R). Für $x = 1/2$ ist wegen (b) Rechteck (R) maximaler Fläche:



Aufgabe 2 (6 Punkte)

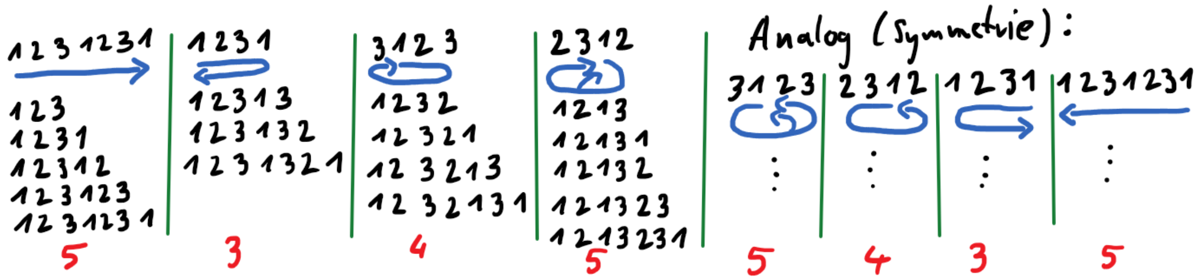
Wir betrachten den einfachen Graphen mit drei Knoten $1, 2, 3$ und den Kanten $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1$.
Wir interessieren uns für die Anzahl der verschiedenen Pfade, die in 1 starten, jeden der drei Knoten besuchen und dabei jede Kante höchstens zwei Mal betreten. Beispiele sind 132 oder 1213.



Bestimme und begründe die gesuchte Anzahl solcher Pfade!

Lösung

Geschicktes Abzählen ergibt 34.
Begründung: In jedem Pfad tauchen Knoten 1 genau 1-3 Mal und die Knoten 2 und 3 je 1-2 Mal auf und nur obige Kanten sind erlaubt. Daher befinden sich alle Pfade nur auf diesen Wegen:



Lösungswege und Verallgemeinerungen untersuchen wir in der **Mathe-AG**:

Wieviele solche Pfade gibt es auf einem Graph mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten, die in 1 starten, jeden der n Knoten besuchen und dabei jede Kante höchstens zwei Mal betreten ?
Wieviele solche Pfade gibt es, die jede Kante mindestens $k \geq 0$ Mal und höchstens $l > k$ Mal betreten?