Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Probleme Abzählen

Wie viele natürliche Zahlen haben die Eigenschaft:
Die Ziffern sind streng monoton steigend (d.h. echt aufsteigend, z.B.wie 346). (Insbesondere sind die Ziffern dann alle paarweise verschieden).

Wie viele natürliche Zahlen haben die Eigenschaft:
Die Ziffern sind monoton steigend (d.h. aufsteigend, z.B. wie 124447).

Knobelaufgabe

Wie viele Quadratzahlen/Primzahlen haben jeweils die Eigenschaft:
Die Ziffern sind monoton steigend?
Die Ziffern sind streng monoton steigend?

Mittels kleinen Programmen haben wir abgezählt:

- Es gibt genau 14 Quadratzahlen mit streng monotoner Ziffernfolge. Die letzte ist 134689.
- Es gibt genau 100 Primzahlen mit streng monotoner Ziffernfolge. Die letzte ist 23456789.

Mittels Zahlen vom Typ
$x = 666 \cdots 667 = 6 \sum_{k=1}^{n} 10^k + 7 = 2/3 \cdot 10^{n+1} + 1/3$ und
$x^2 = (2/3 \cdot 10^{n+1} + 1/3) = 4/9 \cdot 10^{2(n+1)} + 4/9 \cdot 10^n + 1/9 = 444 \cdots 88 \cdots 89$
gibt es unendlich viele Quadratzahlen mit motononer Ziffernfolge

Für beliebige endliche Mengen A, B, C gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Beweis der Formeln durch:

- Bilder (Die Mengen in verschiedenen Farben $\rightsquigarrow$ Venn-Diagramme)
- Abzählen links und rechts

Satz (Einschluss-Ausschluss-Formel)

Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ist

$$|\cup_{i=1}^n M_i| = \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{i<j} |M_i \cap M_j| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3}| \pm \cdots + (-1)^{n+1} |\cap_{i=1}^n M_i|$$

Beweis.

Wir beobachten zuerst mit Binomialsatz
$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-1)^i = (1-1)^k = 0.$
Sei das Element $x \in \cup_{i=1}^n M_i$ in genau $k \leq n$ der Mengen enthalten.
Dann erhalten wir für dieses Element auf der rechten Seite:

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} \pm \cdots + (-1)^{k+1} = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i}(-1)^{i+1} = -\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-1)^i - 1\right) = 1$$

D.h. beim Abzählen kommt jedes $x \in \cup_{i=1}^n M_i$ jeweils genau ein Mal vor. $\square$

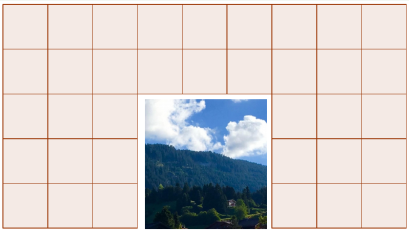
Aufgaben

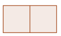
Ein 8×8 Quadrat kann mit 2×1 Fliesen vollständig überdeckt werden. Für das Entfernen welcher zwei einzelnen Felder kann man es weiterhin mit 2×1 Fliesen vollständig überdeckt werden?

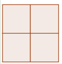
Ein Rechteck wird vollständig mit 2×2 und 4×1 Fliesen überdeckt. Eine letzte Fliese geht kaputt. Kann das Rechteck nach Umordnen mit einer Fliese vom anderen Typ zuletzt überdeckt werden?

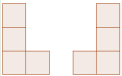
Aufgaben

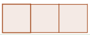
Gegeben sei diese Wand um ein Fenster (leere Fläche), die noch gefliest werden muss:
Mit jeweils welchem Set von Fliesen kann diese Fläche vollständig (ohne Überdeckung oder Zerlegung von Fliesen) abgedeckt werden?

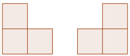


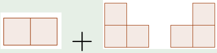
A 

B 

C 

D 

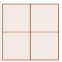
E 

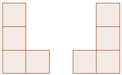
F 

Aufgaben

Sei ein Rechteck mit $4k \in 4\mathbb{N}$ Feldern. Wann kann es mit einem Typ der folgenden Fliesen überdeckt werden?

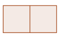
A 

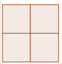
B 

C 

Wann kann es mit genau zwei Typen von obigen Fliesen überdeckt werden?

Sei ein $m \times n$ Rechteck $(m, n \in \mathbb{N})$. Mit welchem Typ von Fliesen und für welche Werte $m, n \in \mathbb{N}$ kann es vollständig überdeckt werden?

A 

B 

C