Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Abzählen

Techniken des Abzählens:

- **Fubini-Prinzip**: Man zählt die Objekte unterschiedlich ab, dies ergibt eine Gleichheit
- **Cantor-Prinzip**: Man stellt eine Bijektion zwischen zwei Mengen her, dies ergibt eine Gleichheit

Abzählen

Fubini-Prinzip: Man zählt die Objekte unterschiedlich ab, dies ergibt eine Gleichheit

Beispiele: Bildbeweise Summen

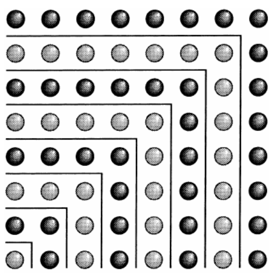

Figure: Beweisidee Summenformel $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Abzählen

Cantor-Prinzip: Man stellt eine Bijektion zwischen zwei Mengen her, dies ergibt eine Gleichheit

Beispiele:

Beweise mittels Cantor-Schröder-Bernstein (Vorwoche) von Aussagen wie:

$$\mathbb{Q}^{<\infty} := \{A \subset \mathbb{Q} : |A| < \infty\} \sim \mathbb{N}$$

Beweise (Vorwoche) von: Für eine endliche Menge A mit $|A| = n$ ist für die Potenzmenge $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Abzählen

- Für eine Menge M bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente
- Für disjunkte Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^n M_i| = \sum_{i=1}^n |M_i|$ (**Summenregel**)
- Für beliebige Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = \prod_{i=1}^n |M_i|$ (**Produktregel**)
- Anzahl der k-Tupel aus $\{1, 2, \dots, n\}$: n^k
- Anzahl der k-Tupel ohne Wiederholung: $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{k!}$
- Daher: Anzahl Anordnungen von $\{1, 2, \dots, n\}$: $n!$
- Daher: Für Mengen A, B und die Menge aller Abbildungen $\{f : A \to B\} \ = B^A$ ist daher $|B^A| = |B|^{|A|}$
- $|\{f : A \to B, injektiv\}| = |B|(|B|-1)\cdots(|B|-|A|+1) = \frac{|B|!}{|A|!}$
- Für endliche Menge M ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Abzählen

Bestimme für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2$.

Wir erhalten durch Abzählen oder durch Binomialsatz

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}.$$

Abzählen

Beweisidee durch Abzählen:

- $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Mit Produktregel ist $k^2 = |\{1, 2, \ldots, k\}^2|$
- Mit Produktregel ist somit $\binom{n}{k} k^2 = |\{(M, k_1, k_2) : M \subseteq \{1, \ldots, n\}, |M| = k, k_1, k_2 \in M\}|$
- Also folgt $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = |\{(M, k_1, k_2) : M \subseteq \{1, \ldots, n\}, |M| \geq 1, k_1, k_2 \in M\}|$
- Abzählen rechter Seite über Fälle $k_1 = k_2$ und $k_1 \neq k_2$ und $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ für den Rest der Menge M ergibt:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

Abzählen

Beweisidee durch Binomialsatz: Im Binomialsatz $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ haben wir beliebig oft differenzierbare Funktionen. Wir beobachten $(x^k)' = kx^{k-1}, (x^k)'' = k(k-1)x^{k-2}$. Das ist schon die ganze Idee – da ist ein k^2. Zuerst ist
$n2^{n-1} = ((x+1)^n)'|_{x=1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^k)'|_{x=1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k$. Analog folgt $n(n-1)(x+1)^{n-2} = ((x+1)^n)'' = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}$. Somit ist für $x=1$: $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k$.
Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k^2 &= n + \left(n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k \right) \\ &= n + n(n-1)2^{n-2} + (n2^{n-1} - n) \\ &= n(n-1)2^{n-2} + 2n2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}\end{aligned}$$

Aufgaben

$2n \in 2\mathbb{N}$ Schachspieler treffen sich zu einem Turnier. Wie viele verschiedene Paarungen für die erste Runde gibt es?

Je 2 Schachspieler aus $n \in \mathbb{N}$ Nationen treffen sich zu einem Turnier. Wie viele verschiedene Paarungen für die erste Runde gibt es, wenn keine Spieler gleicher Nation aufeinandertreffen?

$4n \in 4\mathbb{N}$ Schauspieler treffen sich zu einem Theaterworkshop. Wie viele verschiedene Paarungen in Vierergruppen gibt es?

Aufgaben

Bestimme durch Abzählen oder Binomialsatz:

- $|\{(A,B) : A \subseteq B \subseteq \{1,2,\ldots,n\}\}| = \sum_{B\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} \sum_{A\subseteq B} 1$
- $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i}$

Wie viele natürliche Zahlen haben die Eigenschaft:
Die Ziffern sind streng monoton steigend (d.h. echt aufsteigend).