Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

Mächtigkeit

Satz (Cantor-Schröder-Bernstein)

Seien zwei Mengen X und Y und zwei injektive Abbildungen

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to X$$

Dann gilt $|X| = |Y|$.

Mächtigkeit

Wunderbare Beweisidee: Es gibt wegen Injektivität und Eindeutigkeit der Funktionen nur genau diese Arten von Bahnen:

$$\text{I.} \quad x \to y \to x \to y \to \cdots$$

$$\text{II.} \quad y \to x \to y \to x \to \cdots$$

$$\text{III.} \quad \cdots \to x \to y \to x \to y \to \cdots$$

$$\text{IV.} \quad \begin{array}{ccccccccccc} x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & x & \longrightarrow & y \\ \uparrow & & & & & & & & & & \downarrow \\ y & & & & & & & & & & x \\ \uparrow & & & & & & & & & & \downarrow \\ x & \leftarrow & y & \leftarrow & \cdots & \cdots & \cdots & \leftarrow & x & \leftarrow & y \end{array}$$

Da jedes Element aus X und Y in einem dieser Bahnen ist, erhalten wir die Bijektion

$$T : X \to Y, \qquad x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \text{ in Bahn von Typ I, III, IV} \\ g^{-1}(x), & x \text{ in Bahn von Typ II} \end{cases}$$

Mächtigkeit

Beispielsweise erhalten wir:

- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}^{<\infty} := \{M \subset N : M \ \mathit{endlich}\} \sim \mathbb{N}$
- Die Menge aller möglichen endlichen Wörter aller möglichen Sprachen auf der Welt ist abzählbar

Mächtigkeit

Alle Intervalle, die ein offenes nichtleeres Intervall enthalten, sind gleichmächtig und überabzählbar! Beispielsweise gilt

$$\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0,1) \sim (0,1] \sim [0,1]$$

Satz

Für eine endliche Menge $A, |A| = n$ ist für die Potenzmenge $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Beweismethoden

- na klar, mittels Induktion.
- Binomialsatz: Teilmengen mit genau k Elementen? – $\binom{n}{k}$. Also $|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n$.
- Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, so ist eine Bijektion:

$$A \to \{0,1\}^n, \; A \supseteq B \mapsto (\mathbb{1}_B(a_1), \mathbb{1}_B(a_2), \ldots, \mathbb{1}_B(a_n)) \in \{0,1\}^n$$

- Für jede Teilmenge $B \subseteq A$ und jedes $a_i, i = 1, \ldots, n$ ist entweder $a_i \in B$ oder $a_i \notin B$. Dies ergibt einen Binärbaum von Entscheidungen, jede Menge B ist ein eindeutiger Pfad von den 2^n Pfaden.

Satz (Cantor, 1890)

Für jede Menge M gilt: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subset M\}$ ist mächtiger als M, d.h. es gilt stets

$$|M| < |\mathcal{P}(M)|.$$

Beweis.

- Für endliche Mengen M ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} > |M|$.
- Sei M nun unendlich.
- Da $M \sim \{\{x\} : x \in M\} \subset \mathcal{P}(M)$, ist also M bereits gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$, d.h. es gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
- Angenommen, $M \sim \mathcal{P}(M)$, so existiert eine Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$.
- Wir betrachten die Menge $A := \{x \in M : x \notin f(x)\}$.
- Weil $A \subset M$, ist also $A \in \mathcal{P}(M)$ und es existiert somit wegen der Bijektion ein eindeutiges Urbild $a \in M$ mit $f(a) = A$.
- Für dieses Element ist nun aber nach Definition von A: $a \in A \Leftrightarrow a \in f(a) \Leftrightarrow a \notin A$
- Dies ist ein Widerspruch!
- Also sind M und $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig.

$\square$

Aufgaben

Aufgaben zu Funktionen und Mächtigkeiten

Nette Seite mit vielen Resultaten, Beispielen und Aufgaben zum Knobeln: `https://www.whitman.edu/mathematics/higher_math_online/chapter04.html`