Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Funktionen

Definition (Funktion)

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $f(a) \in B$ zu.

- Unter einer **Funktion** (Abbildung) $f : A \to B$ für Mengen A, B versteht man also eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$.
- Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b.
- Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das **Bild** von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das **Urbild** von D.
- Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich/-menge** und A *Definitionsbereich/-menge* von f.

Funktionen

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

$$
\begin{aligned}
&\textbf{injektiv} && :\Leftrightarrow \ \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z) \\
&\textbf{surjektiv} && :\Leftrightarrow \ f(A) = B \\
&\textbf{bijektiv} && :\Leftrightarrow f \text{ injektiv und surjektiv } (f \text{ heißt dann } \textbf{Bijektion})
\end{aligned}
$$

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A, \ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** f.

Beispiele

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$) Es ist stets $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- **rationale Funktionen** $p(x)/q(x)$ (für Polynome p, q), z.B. Hyperbelfunktion $1/x$ (Rationale Funktionen haben oft Definitionslücken!)
- **Obere/untere Gaußklammer** sind die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ des auf- bzw. abrunden:

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}, \qquad \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : x \geq z\}.$$

- Hilfreiches Tool für Visualisierung von Funktionen und Berechnungen: `www.desmos.com`.

Beispiele

- Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Bijektion. Die Inverse ist die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.
- **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), e^x = \exp(x)$ ($e \approx 2.718$ Eulersche Zahl) und die Umkehrfunktion: (natürliche) **Logarithmusfunktion** $\ln(x)$
- **trigonometrische Funktionen** $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ und die Umkehrfunktionen
- **Anzahl Elemente**:
  $| \cdot | \; : \{M \subset \mathbb{Z} : M \, \text{endlich}\} \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, M \to |M|$
- **Indikatorfunktion** für eine Menge $M \subseteq A$:
  $$\mathbb{1}_M : A \to \{0,1\}, \; \mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$

Mengen wie

$$\mathbb{N}, \ \mathbb{Z}, \ 2\mathbb{N}, \ \mathbb{R}, \ \mathbb{R}^2$$

haben nicht endlich viele Elemente, d.h. sind nicht endlich bzw. **unendlich**.

Eine wichtige Unterscheidung:

- Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann **beliebig groß** sein
  Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist aber immer noch endlich
- Die Menge $\mathbb{N}$ ist **unendlich**
- Mathematik (v.a. Analysis) $\rightsquigarrow$ n geht gegen Unendlich $\rightsquigarrow$ **Konvergenz**

Unendlichkeit

- Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren.
  Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.
- Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.
  Ansonsten heißt die Menge **überabzählbar**.
- Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn eine Bijektion $f : A \to B$ existiert ($A \sim B$).
  Ansonsten sind die Mengen nicht gleichmächtig ($A \nsim B$).
- Bei unendlichen Mengen versagt der Begriff *Größe*, man kann mittels Mächtigkeit nur noch entscheiden, was gleicher Größe ist! Die Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$ ist eine Bijektion. Also ist $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0$ aber $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0$. (Erst bei unendlichen Mengen kann eine Teilmenge gleichmächtig zur Menge sein!)

- Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente (sofern M endlich), ansonsten nur Vergleichbarkeit (z.B. $|M| \geq |\mathbb{N}|$)

Satz

- *Jede Menge, die eine unendliche Menge enthält, ist auch selbst unendlich*
- *All diese Mengen sind abzählbar, d.h.* $\sim \mathbb{N}$*:*

$$\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Q}$$

  (sichtbar durch Bildbeweise - Idee bijektiv Abzählen)
- *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar:* $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$