Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Erinnerung: Konvergenz

Definition (Grenzwert (Limes), Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **konvergent**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Diese Zahl a heißt der **Grenzwert (Limes)** der Folge (a_n). Die Folge heißt **kovergent gegen** a, und wir schreiben

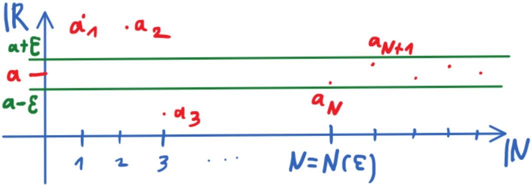
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to a \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt **Nullfolge**.
Existiert keine solche Zahl a, so heißt die Folge **divergent**.

Für eine konvergente Folge ist der Grenzwert eindeutig!

Es gilt nach Definition die Äquivalenz: $\qquad a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| \to 0.$

Erinnerung: Konvergenz Skizze Grenzwert



Definition Grenzwert: Ab einem Index $N = N(\varepsilon)$ gilt stets $|a_n - a| < \varepsilon$

Limes-Ungleichung

Gilt für reelle Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$ sowie

$$a_n \leq b_n$$

für unendlich viele n, dann ist auch $a \leq b$.

Erinnerung: Bereits bekannte Grenzwerte

- Die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ hat den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$
- Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c, c, \ldots), c \in \mathbb{R}$ hat den Grenzwert c
- Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert

  Mittels Limes-Ungleichung folgte für jedes $k > 2$:
- $n^k > n \Rightarrow 0 \leq 1/n^k < 1/n \to 0$, also $\lim_{n\to\infty}(1/n^k) = 0$
- Geometrische Folge $\lim\limits_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$ (analog $\lim\limits_{n\to\infty}(c)^n = 0$ für $|c| < 1$)
- Rechteck-Problem: Für beliebige natürliche Zahlen $0 < a < b$ konvergiert die rekursive Folge gegen den goldenen Schnitt:
  $q_0 = b/a,\ q_{n+1} = 1/q_n + 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61$

  (Im Beweis geht völlig analog auch für reeller Startwert $q_0 > 0$)
- Beispielsweise konvergiert für die Fibonacci-Folge $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ der Quotient ebenso: $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \varphi$

Konvergenz wichtige Sätze

Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (d.h. es existiert ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

- Umkehrung falsch: Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.

Limesregeln

Für konvergente Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$ gilt auch

$$a_n + b_n \to a + b, \quad a_n b_n \to ab, \quad a_n/b_n \to a/b \ (b \neq 0!)$$

Monotone Konvergenz

Es gelten die folgenden Äquivalenzen für eine $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$:

- Die monoton steigende Folge (d.h. $a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$) ist: nach oben beschränkt $\iff$ konvergent.
- Die monoton fallende Folge (d.h. $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$) ist: nach unten beschränkt $\iff$ konvergent.

Beispiel Konvergenz: Babylonisches Wurzelziehen

Heron-Verfahren (Babylonisches Wurzelziehen)

Für jedes $x > 0$ konvergiert die rekursive Folge gegen die Quadratwurzel:

$$a_0 = x, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad a_n \to \sqrt{x}.$$

Beispiel Konvergenz: Babylonisches Wurzelziehen

Heron-Verfahren (Babylonisches Wurzelziehen)

Für jedes $x > 0$ konvergiert die rekursive Folge gegen die Quadratwurzel:

$$a_0 = x, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad a_n \to \sqrt{x}.$$

(1) : Wegen

$$a_{n+1}^2 - x = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)^2 - x = \frac{a_n^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4a_n^2} - x = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right)^2 \geq 0$$

folgt für alle $n \geq 1$: $a_n^2 \geq x \Leftrightarrow a_n \geq \sqrt{x} > 0$, d.h. Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist nach unten beschränkt.

(2) : Mit (1) ist für alle $n \geq 1$:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} - \frac{x}{2a_n} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x) \geq 0,$$

d.h. Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.

Beispiel Konvergenz: Babylonisches Wurzelziehen

Für jedes $x > 0$ konvergiert die rekursive Folge gegen die Quadratwurzel:

$$a_0 = x, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad a_n \to \sqrt{x}.$$

$(3) : (1) + (2) +$ Monotone Konvergenz : es existiert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \sqrt{x}$

Mit Limesregeln (Summe, Quotient) gilt in der Gleichung der Rekursion:

$$a \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \to \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \;\Leftrightarrow\; a^2 = x \quad \Rightarrow a_n \to a = \sqrt{x}.$$

Das Heron-Verfahren (ca. 60 n. Chr.) ist zugleich eines der ältesten Algorithmen. Die ersten Iterationen für $\sqrt{2}$ finden sich bereits in babylonischen Keilschrifttafeln (ca 1800 v. Chr. (!)):

n	0	1	2	3
a_n	2	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{17}{12} \approx 1.4167$	$\frac{577}{408} \approx 1.4142$

Knobelaufgabe

Grenzwert einer rekursiven Folge

Zeige mittels dem Satz über monotone Konvergenz die Konvergenz der Folge und bestimme den Grenzwert:

$$a_0 = 4 \quad \text{und für alle } n \geq 0 \ : a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}.$$