Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Es gibt keine rationale Zahl q mit $q^2 = 2$, d.h. die Wurzel $\sqrt{2}$ ist irrational ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Wir betrachten die Beweisideen (stets durch Widerspruch):

1. Klassisch durch Teilerfremdheit
2. Elementar durch Betrachtung letzter Ziffer
3. Mittels Teppichsatz
4. Mittels neuen Bruch
5. Mittels elementaren neuen Bruch
6. Algebraisch
7. Mittels Extremalprinzip

Irrationalität von $\sqrt{2}$

1. Beweis (klassisch, durch Teilerfremdheit).

Angenommen, es ist $\sqrt{2}$ rational, d.h. es gibt $m, n \in \mathbb{N}$ teilefremd mit $m, n > 0$ und $\sqrt{2} = m/n$. Dann ist $2 = m^2/n^2 \Leftrightarrow 2n^2 = m^2$. Also ist nach Beobachtung auch $m^2 \in 2\mathbb{N}$. Dann ist aber $m^2 = (2l)^2 = 4l^2$, d.h. auch $2n^2 = 4l^2 \Leftrightarrow n^2 = 2l^2$. Somit ist auch $n \in 2\mathbb{N}$, ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n! $\square$

2. Beweis (elementar, Betrachtung letzte Ziffer).

Für $k \in \mathbb{N}$ hat k^2 die letzte Ziffer in der Menge $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ und daher $2k^2$ die letzte Ziffer in der Menge $\{0, 2, 8\}$. Angenommen, es gilt $(m/n)^2 = 2$ für $m/n \in \mathbb{Q}$ mit teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$ (d.h. m/n vollständig gekürzt). Es ist $(m/n)^2 = 2 \Leftrightarrow 2n^2 = m^2$ und damit in der obigen Gleichung nur die letzte Ziffer 0 möglich. Dann haben m und n ihre letzte Ziffer in der Menge $\{0, 5\}$, sind als beide teilbar durch 5 und nicht teilerfremd, ein Widerspruch! $\square$

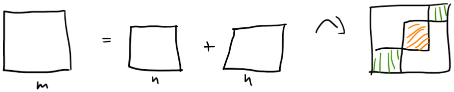
Der nächste Beweis basiert auf der Trivialität, in Alsina, Nelsen: Perlen der Mathematik, 13.1 als **Teppichsatz** bezeichnet : Für Mengen A, B gilt

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B \cup B \setminus A)$$

Zwei Teppiche mit der Fläche des ganzen Bodens werden verschoben, dann ist die Fläche ohne Teppiche gleichgroß wie die doppelt überdeckte Fläche.

3. Beweis (mit Teppichsatz).

Mit dem Teppichsatz haben wir in $2n^2 = m^2$ für $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd und minimal: doppelt überdeckt (orange) $(2n-m)^2$ = leere Fläche (grün) $2(m-n)^2$.



Somit ergibt Teppichsatz: $(2n-m)^2 = 2(m-n)^2 \Leftrightarrow 2 = \dfrac{(2n-m)^2}{(m-n)^2}$ mit $m - n < n$ und $2n - m < m$ ($\Leftrightarrow n < m$), das ist ein Widerspruch zur Minimalität von m und n. □

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Die Idee aus dem Teppichsatzbeweis können wir auch ohne Teppiche verwenden:

4. Beweis (neuer Bruch).

Sei $\sqrt{2} = m/n \in \mathbb{Q}$ mit minimalen teilefremden m, n. Wegen $1 < m/n < 2$ (Einheitsquadrat) ist $m > n$, $n > m - n$ und daher $2n - m < 2m - m = m$. Dann ist für diese Terme mittels $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ (Nenner ganzzahlig machen):

$$\frac{2n - m}{m - n} = \frac{2 - m/n}{m/n - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 2\sqrt{2} - 2 + 2 = \sqrt{2}$$

Somit haben wir erneut einen Widerspruch zur Minimalität von m, n. $\square$

Irrationalität von $\sqrt{2}$

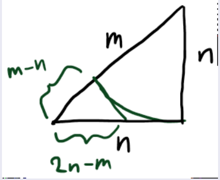
Die Idee können wir sogar noch etwas kürzer formulieren:

5. Beweis (elementar neuer Bruch).

In dem halben Quadrat der Seitenlänge n und Diagonale $m = \sqrt{2}n$ mit minimalen teilefremden m, n erhalten wir ein neues ähnliches Dreieck: Die lange Seite r des neuen Dreiecks ist wegen Ähnlichkeit:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{m-n} \Leftrightarrow r = \frac{m(m-n)}{n} = \frac{m^2}{n^2}n - m = 2n - m$$

Also folgt erneut ein Widerspruch zur Minimalität von m und n. □



6. Beweis (algebraisch).

Sei die Menge $W := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Offenbar ist W bezüglich $+$ und $\cdot$ abgeschlossen:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

Sei nun $\alpha = \sqrt{2} - 1 \in (0, 1)$ (klar aus $1 < 2 < 4$ bzw. Einheitsquadrat). Es ist $\alpha \in W$. Zudem ist $\lim_{k\to\infty} \alpha^k = 0$. Mit der Abgeschlossenheit von W ist auch für alle $k \in \mathbb{N}: \ \alpha^k \in W$, d.h. $0 < \alpha^k = a_k + b_k\sqrt{2}$ für passende $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. Angenommen, es ist $\sqrt{2} = m/n \in \mathbb{Q}$ dann folgt

$$0 < \alpha^k = a_k + b_k\sqrt{2} = \frac{a_k n + b_k m}{n} \Rightarrow \frac{a_k n + b_k m}{n} > 1/n$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{k\to\infty} \alpha^k = 0$! $\square$

Exkurs Extremalprinzip

Unsere Beweise basieren letztlich auf *m* und *n* teilerfremd und minimal.

Extremalprinzipien liegen vielen Prozessen in der Natur zugrunde:

- Minimale Oberfläche (Seifenblase)
- Maximale Lichtausbeute (Anordnung Blütenblätter)
- Minimale Energie (Musterbildung, chemische Reaktion)
- Maximale Varianz (Evolution, Immunsysteme)

In der Mathematik ist die Grundtechnik **Extremalprinzip** verwendbar als:

- Wenn es Elemente mit einer Eigenschaft gibt (z.B. Element einer Menge), **dann gibt es auch** davon Elemente mit weiteren/spezielleren, d.h. **extremen** Eigenschaften (z.B. ein kleinstes Element, mit konstanter Ableitung, etc.)
- Extremale Objekte haben oft weitere besondere Struktur/Symmetrie
- Daraus ergibt sich als Lösungsstrategie: Betrachte extremale Objekte (größte, kleinste, symmetrische, glatte, etc.)
- Bei $\exists$-**Aussage:** Das extremale Objekt als Konstruktion oder Beispiel
- Bei $\forall$-**Aussage:** sei Gegenbeispiel extremal

Irrationalität von $\sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^2$

Satz

Für jede natürliche Nichtquadratzahl n gibt es keine rationale Zahl q mit $q^2 = n$, d.h. die Wurzel $\sqrt{n}$ ist irrational.

7. Beweis (Extremalprinzip).

Sei $S := \{m \in \mathbb{N} : m\sqrt{n} \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Angenommen, es ist $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, so ist S nichtleer und hat daher ein Minimum $m_0 := \min S \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in (0,1)$ und

$$(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)m_0\sqrt{n} = m_0 n - m_0\sqrt{n}\lfloor\sqrt{n}\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)m_0 \in S$ aber wegen $(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)m_0 < m_0$ ein Widerspruch zur Minimalität von m_0. $\square$

Knobelaufgaben

Welche der Beweise 1 bis 6 lassen sich verallgemeinern zu Beweisen der Irrationalität von $\sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^2$?

$\sqrt{2}$ ist die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge 1.

- Sind die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck mit Seitenlänge 1 auch irrational?
- Sind alle Diagonalen im regelmäßigen m-Eck mit Seitenlänge 1 irrational?