Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

Wiederholung Beweise von Formel von Heron und Formel von Brahmagupta. Siehe auch Notizen: Spaß mit Geometrie.

Begriffe Abzählen

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

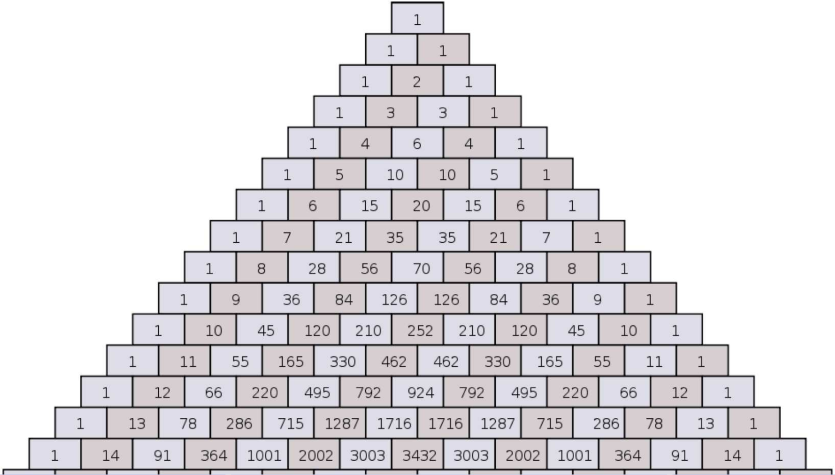
Wir schreiben auch nur kurz $n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$

Beweis durch Abzählen.

Wir zählen die Anzahl der Umordnungen von $1, 2, \ldots, n$. Für das erste Element 1 haben wir n Plätze. Für das zweite Element 2 haben wir anschließend nur noch $n-1$ Plätze. Usw: Für das k-te Element haben $n-k+1$ Plätze. Also erhalten wir als Anzahl der Umordnungen $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ □

$$
\begin{cases}
(a+b)^1 = a+b \\
(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \\
\vdots
\end{cases}
$$

$$
(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n
$$



Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k} :=$ Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: a^k enthalten
3. a^k nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus n Klammern $(a+b)$ jeweils genau k mal a
5. Das ist gerade die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$
6. also: Produkt $(a+b)^n$ ist Summe über alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
7. Damit folgt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ □

Binomialsatz und Binomialkoeffizienten

Die verwendeten Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten** und man sieht durch Abzählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Die Anzahl aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

Binomialsatz

Übung

Zeige mit dem Binomialsatz: Für eine Menge C mit genau $n \in \mathbb{N}$ Elementen gibt es genau 3^n Paare von Teilmengen (A, B) mit

$$A \subseteq B \subseteq C$$

Folgen

Definition (Folge)

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die man durch Aufzählung aufschreibt und die wir abkürzen als:

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f_n)_{n \geq 1} = (f_n)$$

Dabei wird jedem **Index** $n \in \mathbb{N}$ ein **Folgenglied** $f(n) = f_n$ zugeordnet.

Beispiele:

- $(1/n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

  Die Folge kann auch eine **rekursive Vorschrift (Rekursion)** haben:
- $a_0 = 2$ und dann: $a_{n+1} = -2a_n$: $(a_n)_{n \geq 0} = (2, -4, 8, -16, \dots)$
- **Fibonacci-Folge**: $f_0 = f_1 = 1$ und für alle $n \geq 1$ ist $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

Exkurs Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Folge ist auch gegeben durch die Anzahl der verschiedenen Überdeckungen von $n \in \mathbb{N}$ Feldern in Form eines $1 \times n$ Balkens mit 1×1 und 1×2 Dominosteinen.

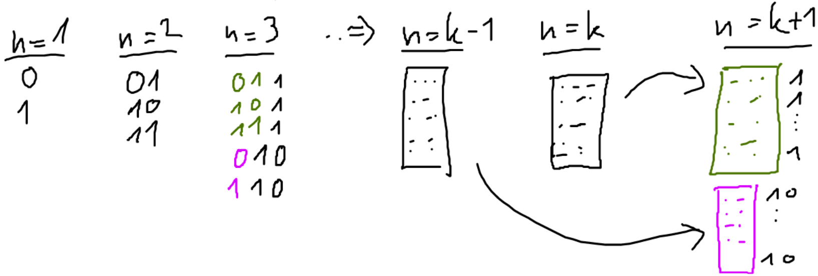
Für die Fibonacci-Folge gibt es sehr viele weitere Formeln über Summen, Produkte, etc.

Die Fibonacci-Folge taucht in der Mathematik zahlreich auf.
Beispielsweise auch im obigen Pascalschen Dreieck der Binomialkoeffizienten:
Die Fibonacci-Zahlen erhält man als Summe über die schrägen Diagonalen.

Übung

Romeo und Julia treffen sich 10 Mal zum Essen, ganz zufällig kocht einer der beiden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Romeo nie zwei Treffen hintereinander kochen?
Bestimme zuerst eine Rekursion für die Anzahl a_n der Kombinationen des Kochens für $n \in \mathbb{N}$ Treffen ohne zweimalige Kochkünste von Romeo hintereinander!

Es gibt insgesamt $2^{10} = 1024$ verschiedene Koch-Reihenfolgen mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Für die Untersuchung der Kombintionen der Treffen kodieren wir $0 :=$ Romeo , $1 :=$ Julia:



Für die Anzahl A_n der Kombinationen bei n Treffen erhalten wir also $A_1 = 2, A_2 = 3$ und allgemein die Rekursion $A_{k+1} = A_k + A_{k-1}$. Somit sind die Anzahlen enthalten in der **Fibonacci-Folge**:

$$F_0 := 0, F_1 := 1, \; F_{n+1} := F_n + F_{n-1}, \; n \geq 1$$

und es ist hier $A_n = F_{n+2}$ und $F_{12} = 144$ die gesuchte Anzahl der Kombinationen ohne Romeos Kochkünste zwei Treffen hintereinander. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $144 \cdot 2^{-10} \approx 0.14$.

Ausblick

- **16.12:** Knobelaufgaben und Einführung Konvergenz
- **23.12:** Mathe-AG entfällt! - Weihnachtsferien! Mathe-AG ist zurück am **13.01.23**