

# Mathe-AG Uni Mannheim

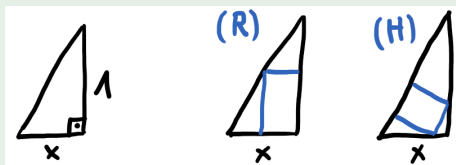
Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski



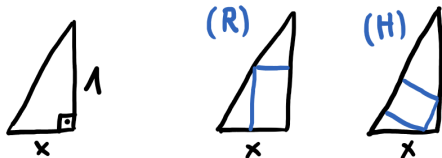
## TDM 2022 Aufgabe 1

Sei stets ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen 1 und  $0 < x \leq 1$ . Wir untersuchen maximale Quadrate und Rechtecke, die wir in das Dreieck legen können, entweder rechteckig (R) eingelegt oder an die Hypotenuse angelegt (H), siehe Skizze:



- Bestimme die maximale Seitenlänge  $a(x)$  des eingezeichneten Quadrates in Abhängigkeit von  $x$  bei Typ (R) und (H)?

# Seitenlängen maximales Quadrat



Mittels Ähnlichkeiten von Dreiecken fanden wir für die maximale Seitenlänge des Quadrates die Formeln:

$$(R) \ a_R(x) = \frac{x}{x+1}, \quad (H) \ a_H(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2+x+1}$$

und zeigten mittels umformen für alle  $x \in (0, 1]$ :

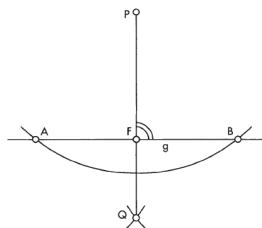
$$a_R(x) \geq a_H(x)$$

# Spaß mit Geometrie

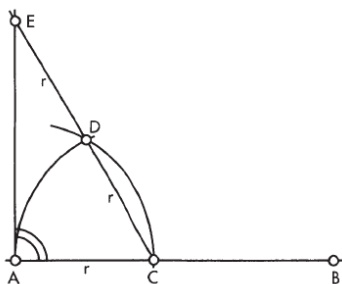
Neue Rubrik: Studium eines eigenartigen Lehrbuches zur Geometrie. Darin nur Begriffe, Sätze und Konstruktionen.

Grundbegriffe:

- Punkt, Gerade, Ebene
- Ebene wird eindeutig bestimmt durch drei Punkte oder Punkt und Gerade oder zwei Gerade, die nicht identisch
- parallel, senkrecht, Lot, Strahl, Mittelsenkrechte
- Konstruktion Lot und Sekrechte durch einen Punkt:



Wie und wieso ist das eine Konstruktion der Senkrechten zu der Strecke  $\overline{AB}$  durch  $A$ ?



# Begriffe Mengen

Relationen und Definitionen für Mengen:

$A \subseteq B : \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$	<b>A Teilmenge</b> von $B$
$A = B : \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	<b>Gleichheit</b>
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	<b>Vereinigung</b>
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	<b>Durchschnitt</b>
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	<b>kartesisches Produkt</b>
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	<b>Komplement</b> von $B$ in $A$

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
- $\{1, 2\} \cap \{0, 1, 5\} = \{1\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} (= 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N})$
- $\{n \in \mathbb{N} : n > 2\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 10\} = \{3\}$

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$  für  $-\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$  (ganze Zahlen)
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$
- $A_1 \times \dots \times A_N := \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : x_1 \in A_1, \dots, x_N \in A_N\}$  Menge von **N-Tupeln**

## Beachte den Unterschied:

- **Menge:**  $\{\dots\}$  - geschweifte Klammern - Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
- **Tupel/Vektor:**  $(\dots)$  - runde Klammern - Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!
- $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$  ist eine (identische!) Menge
- $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1) \neq (3, 2, 1)$  sind drei verschiedene Vektoren im  $\mathbb{R}^3$

## Wichtige Zahlenmengen:

- **Potenzmenge** einer Menge  $M$  ist die Menge aller Teilmengen :  
 $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$
- **Leere Menge**  $\emptyset := \{\}$  (Es gilt für jede Menge  $M$  :  $\emptyset \subseteq M$ )
- **Natürliche Zahlen**  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- **Ganze Zahlen**  $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche)  $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Primzahlen**  $\text{Prim} := \{n : n \geq 2, n \text{ hat nur die Teiler } 1 \text{ und } n\}$
- **Reelle Zahlen**  $\mathbb{R}$  (Analysis!). Es gilt:  $\text{Prim} \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- **Intervalle**
  - $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  (abgeschlossenes Intervall)
  - $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  (offenes Intervall)
  - $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ , (halboffene Intervalle)

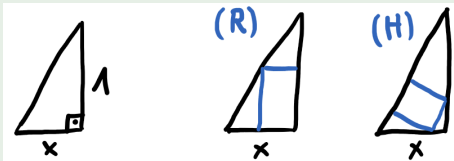


Nächste Themen in Mathe-AG:

- Weitere Fragen zu Aufgaben von Tag der Mathematik
- Abzählen (Anzahlen bestimmen, Binomialsatz, Einschluss-Ausschluss-Formel)
- Spaß mit Geometrie (Fortsetzung)

## TDM 2022 Aufgabe 1

Sei stets ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen 1 und  $0 < x \leq 1$ . Wir untersuchen maximale Quadrate und Rechtecke, die wir in das Dreieck legen können, entweder rechteckig (R) eingelegt oder an die Hypotenuse angelegt (H), siehe Skizze:



- Bestimme die Seitenlängen  $a = pb < b$  des maximal eingezeichneten Rechtecks in Abhängigkeit von  $x$  bei Typ (R) oder (H)?  
Gesucht ist also eine Funktion  $a(p, x)$  für die kurze Seite ( $a(p, x) = a < b$ ) des Rechtecks.
- Weitere interessante Fragen über eingelegte Figuren?