Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

Wechselgeld

Bäuerin Berta kauft Gemüße auf dem Markt ein. Sie erhält 31 Cent Wechselgeld.
Auf wieviel verschiedene Arten kann dieses Wechselgeld (mittels Münzen im Wert von 1 oder 2 oder 5 oder 10 oder 20 Cent) erfolgen?

Hinweis: Betrachte zuerst ein Wechselgeld von $1, 2, 3, \ldots$ Cent.
Was fällt dir auf, sobald das Wechselgeld den Wert einer weiteren Münze übersteigt?

Betrachten wir das einfachere Problem: Zerlegung nur in 1-Cent Stücke. Die Anzahl der Zerlegungen eines Betrages von $m \in \mathbb{N}$ Cent ist $A_1(m) = 1$.
2. Gehen wir weiter zur Zerlegung in 1 und 2 Cent. Die Anzahl der Zerlegungen ergibt erstmals eine neue Anzahl ab $m = 2$, nämlich $A_{1,2}(m) = 2$ und dann die Rekursion

$$A_{1,2}(m) = A_1(m) + A_{1,2}(m-2)$$

3. Analog erhalten wir erstmals die neue Anzahl $A_{1,2,5}(5) = A_{1,2}(5) + 1 = 4$ und die Rekursion

$$A_{1,2,5}(m) = A_{1,2}(m) + A_{1,2,5}(m-5).$$

Das ist die einfache Idee! Analog erhalten wir für $A_{x_1,x_2,\ldots}(m)$ die Anzahl der Zerlegungen von Betrag $m \in \mathbb{N}$ in $x_1, x_2, \ldots$-Cent. Damit erhalten wir die rekursiven Anzahlen und mit einem Programm die gesuchte Anzahl als 116 verschiedene Zerlegungen von 31 Cent.

Begriffe Mengen

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**).
Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert.

- $\sqrt{2} :=$ die positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst
- $n \in \mathbb{N}$ ist teilbar durch $m \in \mathbb{N}$ $:\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M $\qquad (x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M))$

Definition einer Menge oftmals durch eine Aussageform:

$$M := \{x : p(x)\} \qquad \text{bzw.} \qquad M := \{x \mid p(x)\}$$

Begriffe Mengen

Beispiele:

- Beatles $:= \{$John Lennon, Paul McCartney, George Harrison, Ringo Starr$\}$
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (später genauer!)
- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$ (Es gibt hier nur drei verschiedene Elemente!)
- $\{n \in \mathbb{N} : n^2 < 10\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (Reihenfolge in Menge irrelevant!)
- $\{1, 2, \pi,$ Olaf Scholz$, \{1, 2, 3\}\}$ (Elemente sind beliebig, auch Mengen möglich!)

Begriffe Mengen

Mit **Quantoren** wird eine Aussage A (oft als Prädikat $A(\cdot)$) über Elemente einer Menge M getroffen:

$\forall x \in M : A$ **Für alle** Elemente x in M gilt A

$\exists x \in M : A$ **Es gibt (mindestens) ein** Element x in M, für das A gilt

$\exists! x \in M : A$ **Es gibt genau ein** Element x in M, für das A gilt

Statt $\forall x \in M : A(x)$ schreibt man auch $A(x),\ x \in M$

Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$ (Für alle natürliche Zahlen n gilt $n^2 \geq n$. Die Aussage ist also: Es gilt $1^2 \geq 1$ und $2^2 \geq 2$ und usw.
- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 11$ (Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n^2 = 11$)
- $n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$ (Definition: gerade bedeutet durch 2 teilbar)

Ausblick

Nächste Themen in Mathe-AG:

- Mengen
- Abzählen (Anzahlen bestimmen)
- Sätze aus der Geometrie (u.a. Kreise, Sehnenvielecke, Satz von Brahmagupta)