Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

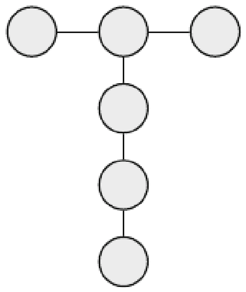
Peter Parczewski

Knobelaufgaben

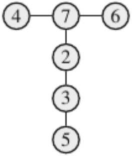
Zahlenrätsel

Bäuerin Berta möchte sechs aufeinanderfolgende Zahlen in die Kreise einsetzen, sodass der Summenwert der Zahlen, die auf einer Linie liegen, jeweils gleich ist.

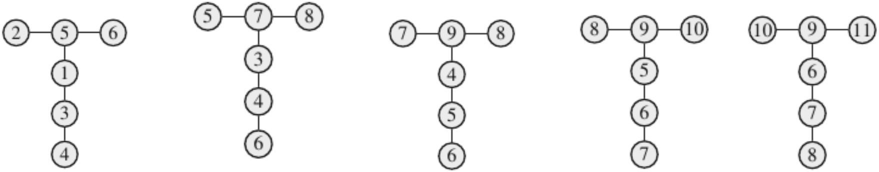
1. Zeige: Für die Zahlen 2 bis 7 gibt es eine Lösung.
2. Finde drei weitere Lösungen für andere sechs aufeinanderfolgende Zahlen.
3. Beweise, dass es höchstens endlich viele solche Lösungen mit aufeinanderfolgenden Zahlen geben kann.



1 Interessante Struktur beobachtet: In beiden Linien zugleich ist immer ungerade, höchste Zahl immer in kurzer Linie. Eine der drei Lösungen:



2 Alle fünf möglichen Mengen von Zahlen:



3 Wenn die gemeinsame Zahl der beiden Linien *a* ist, was gilt dann für die Summen der restlichen Zahlen in den Linien? Was muss gelten für die Summe der kleinsten drei und der größten zwei?

Knobelaufgaben

Zweierpotenzen

Beweise oder widerlege:

Es gibt natürliche Zahlen $m > n > 1$, so dass die Differenz der Zahlen $2^{(2^m)}$ und $2^{(2^n)}$ nicht durch 10 teilbar ist.

Probieren wir die ersten Werte aus: Da $m > n > 1$, ist $2^{2^2} = 2^4 = 16$ und $2^{2^3} = 2^8 = 16^2$. Wir erkennen, dass alle diese Zahlen Vielfache von 16 sein müssen: Für $m > 2$ ist mit Potenzgesetzen

$$2^{(2^m)} = 2^{4 \cdot 2^{m-2}} = (2^4)^{2^{m-2}} = 16^{2^{m-2}}.$$

Produkte von Zahlen mit Einerziffer 6 haben selbst die Einerziffer 6, denn: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist

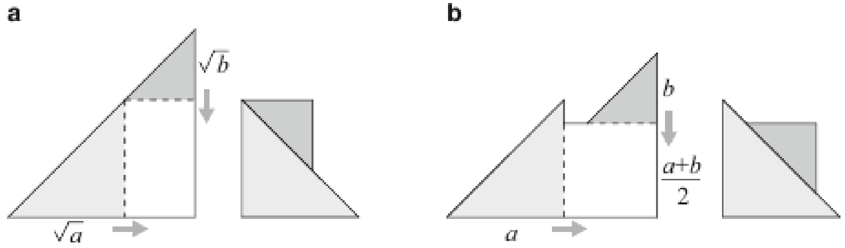
$$(10x + 6)(10y + 6) = 100xy + 60(x + y) + 36$$

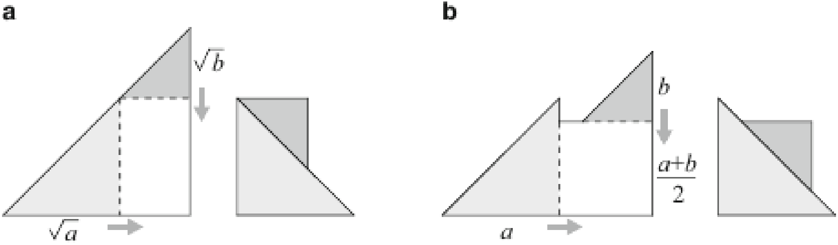
Also haben alle Zahlen $2^{(2^m)}$ die Einerziffer 6 und unterscheiden sich durch mindestens einen Faktor 16, was größer 10 ist. Also müssen alle Differenzen $2^{(2^m)} - 2^{(2^n)}$ selbst Vielfache von 10 sein.

Knobelaufgaben

Legefiguren

Welche Ungleichungen für $a, b > 0$ erhalten wir aus diesen Figuren?





$$\mathbf{a}: \ \tfrac{1}{2}(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2) = \tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \mathbf{b}: \ \tfrac{a^2}{2} + \tfrac{b^2}{2} \geq \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2$$

- Wieso ist in der rechten Figur die Seite des weißen Quadrates $\frac{a+b}{2}$?
- Rechne die Flächen in den Figuren selbst nach! Was ist der Flächeninhalt der jeweils weißen Fläche, die überdeckt wird? Welcher Seite in den Ungleichungen entspricht die weiße Fläche?

Probleme

Wechselgeld

Bäuerin Berta kauft Gemüße auf dem Markt ein. Sie erhält 31 Cent Wechselgeld.
Auf wieviel verschiedene Arten kann dieses Wechselgeld (mittels Münzen im Wert von 1 oder 2 oder 5 oder 10 oder 20 Cent) erfolgen?

Hinweis: Betrachte zuerst ein Wechselgeld von $1, 2, 3, \ldots$ Cent.
Was fällt dir auf, sobald das Wechselgeld den Wert einer weiteren Münze übersteigt?

Nächste Themen in Mathe-AG:

- Mengen
- Abzählen (Anzahlen bestimmen)