Mathe-AG Uni Mannheim

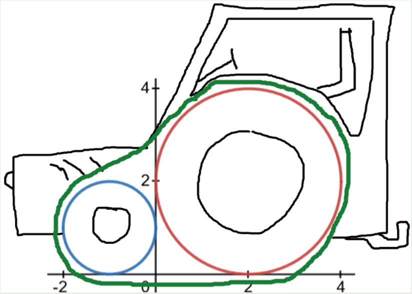
Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

Knobelaufgaben

Bertas Traktorraupe

Bäuerin Berta will nicht mehr mit ihrem Traktor im moorigen Acker versinken und sucht breite **Reifen** eines Raupenfahrzeugs, um diese zugleich über die beiden Räder des Traktors mit den Radien 1 und 2 (siehe unten) zu ziehen:



Welchen Radius müssen diese **Reifen** mindestens haben? ≈ 2.55

Begriffe Aussagenlogik

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann.
Tertium non datur (Ein Drittes gibt es nicht) (ARISTOTELES).

Das sind (aussagenlogische) Aussagen :

- $4 < 7$
- Am 01.11.1822 hat es in Mannheim geregnet
- Es gibt unendlich viele Primzahlen
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^3 < 2^4$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 3 teilbar

Das sind keine (aussagenlogischen) Aussagen:

- Guten Tag!
- 4
- Dieser Satz ist falsch $\quad \leadsto$ (Paradoxien, Logik)

Begriffe Aussagenlogik

Sind A und B Aussagen, so bildet man zusammengesetzte Aussagen:

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **äquivalent**) d.h. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Deren Wahrheitswerte werden durch Wahrheitstafeln definiert:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Begriffe Aussagenlogik

Zusammengesetzte Aussagen sind:

- Mannheim liegt am Meer und $\pi^3 > \sqrt{11}^3$
- Wenn $4 > 7$, dann ist $\pi < 2$
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$

Satz

Für jede Aussage A gilt:

- *$A \vee \neg A$ ist immer wahr (**Tautologie**).*
- *$A \wedge \neg A$ ist immer falsch.*

Logische Äquivalenz von Aussagen mittels Wahrheitstafeln.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

$$\Rightarrow \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Begriffe Ungleichungen

Ordnungsaxiome:

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind bezüglich $<$ **total geordnet**:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt **genau eine** der drei Aussagen:

$$x < y, \ x = y, \ y < x$$

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.
- **Ordnung Addition**: Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$.
- **Ordnung Multiplikation**: Aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $xz < yz$.

  Jede reelle Zahl $x > 0$ heißt **positiv** und jedes $x \geq 0$ **nichtnegativ** (und analog **negativ** und **nichtpositiv**).

Begriffe Ungleichungen

- $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x \Leftrightarrow -x > -y$
- Aus $x < y$ und $z < 0$ folgt $xz > yz$.

  Beweis: Mit $-z > 0$ und **Ordnung Multiplikation** und zuvor ist

  $$x < y, -z > 0 \Rightarrow -xz < -yz \Leftrightarrow xz > yz$$

- Für $x \neq 0$ gilt $x^2 = (-x)^2 > 0$.

  Beweis: Wegen $x \neq 0$ ist entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Im ersten Fall folgt aus **Ordnung Multiplikation** $x \cdot x > 0$ und im zweiten Fall verwende vorherigen Punkt.

- Insbesondere ist nun damit auch bewiesen (!) : $1 > 0$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.
- Für alle $x > 0$ gilt $\frac{1}{x} > 0$. (Sonst wäre $1 = x \cdot \frac{1}{x} < 0$)
- $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. (Sonst wäre $1 = x \cdot \frac{1}{x} < y \cdot \frac{1}{y} = 1$)

Knobelaufgaben

Ungleichungen

Welche Ungleichungen sind wahr?

1. $5 + 9 < 6\sqrt{5}$
2. $\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \geq 2$
3. $6 < \frac{2}{1/12+1/3}$

Ungleichungen

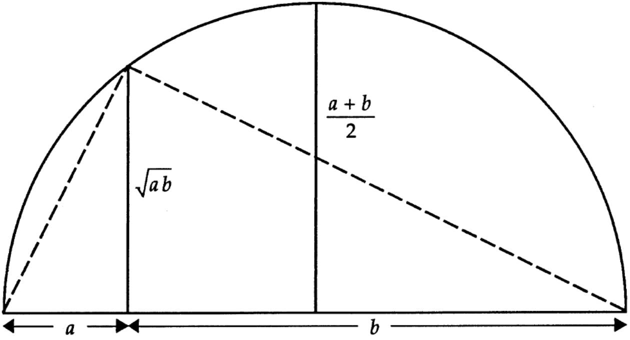
Satz

Für alle $a, b > 0$ gilt:

- $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$
- $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ *AM-GM-Ungleichung (Arithmetisches Mittel/Geometrisches Mittel)*
- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{1/a+1/b}$

Ungleichungen

Bildbeweis für AM-GM-Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$:



Wieso ist die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks genau $\sqrt{ab}$?
($\rightsquigarrow$ Höhensatz von Euklid)

Probleme

Wechselgeld

Bäuerin Berta kauft Gemüße auf dem Markt ein. Sie erhält 31 Cent Wechselgeld.
Auf wieviel verschiedene Arten kann dieses Wechselgeld (mittels Münzen im Wert von 1 oder 2 oder 5 oder 10 oder 20 Cent) erfolgen?

Hinweis: Betrachte zuerst ein Wechselgeld von $1, 2, 3, \ldots$ Cent.
Was fällt dir auf, sobald das Wechselgeld den Wert einer weiteren Münze übersteigt?

Nächste Themen in Mathe-AG:

- Mengen
- Abzählen (Anzahlen bestimmen)