

Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

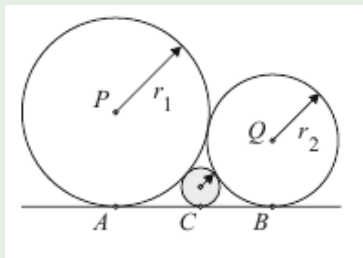
Peter Parczewski



Knobelaufgaben

Zum Wegkugeln!

In der Abbildung hat der kleinste Kreis den Radius r_3 und es sei $r_1 > r_2 > r_3 > 0$.



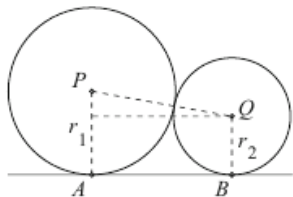
Beweise:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Hinweis:

Bestimme zuerst beispielsweise die Länge \overline{AB} nur mittels von r_1 und r_2 .

Mit dem Satz von Pythagoras und $\overline{PQ} = r_1 + r_2$ erhalten wir in der Figur



$$\overline{AB}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2 = 4r_1r_2.$$

Also ist $\overline{AB} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Analog erhalten wir aus der Betrachtung anderer Paare von Kreisen $\overline{AC} = 2\sqrt{r_1r_3}$ und $\overline{CB} = 2\sqrt{r_3r_2}$. Damit ist aber wegen $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$,

$$2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_3r_2}$$

und die Division durch $2\sqrt{r_1r_2r_3}$ liefert letztlich

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Aha?

Seien drei ähnliche Buchstaben mit den Höhen im Verhältnis $3 : 4 : 5$.



Ist die Fläche der beiden ersten kleinen Buchstaben kleiner, gleich oder größer im Vergleich zur Fläche des großen Buchstaben?

- Die Fläche der kleinen A's ist gleich wie die Fläche des großen A !
- Satz des Pythagoras! $3^2 + 4^2 = 5^2$ (ein Pythagoreisches Tripel)
- Fläche eines Buchstaben ist proportional zu Höhe²
- \rightsquigarrow Pythagoras gilt für alle Flächen: Quadrate, Kreise, Buchstaben, ...

Teilbarkeit

Beweise oder widerlege: Erfüllen drei natürliche Zahlen a, b, c die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

so ist mindestens eine dieser Zahlen durch 3 teilbar.

Zuerst eine Beobachtung über Reste bei Division durch 3 von $n \in \mathbb{N}$ und n^2 :

$$\begin{array}{c|c|c|c} n \bmod 3 = & 0 & 1 & 2 \\ \hline n^2 \bmod 3 = & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

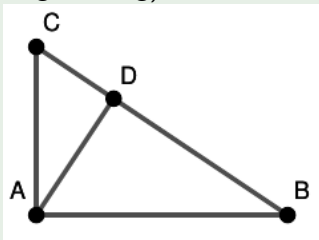
Somit ist für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ notwendig, dass auch die Reste der Division bezüglich 3 beider Seiten gleich sind. Nach der Beobachtung können die Quadratzahlen a^2 , b^2 und c^2 nur die Reste 0 und 1 haben. Damit kann die Gleichung der Reste nur in folgenden drei Fällen für $(a^2 \bmod 3, b^2 \bmod 3, c^2 \bmod 3)$ erfüllt sein:

$$(0, 0, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1)$$

In all diesen Fällen ist also mindestens eine Quadratzahl von a^2 , b^2 und c^2 durch 3 teilbar. Da 3 Primzahl ist, muß dann auch die zugehörige Zahl selbst durch 3 teilbar sein.

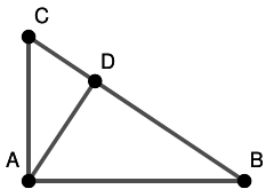
Lärm

Seien ein Beobachter in A und drei gleiche Trompeten in B, C und dem Lot D auf BC. Es tröten nun zuerst beide Trompeten in B und C und anschließend nur die Trompete in D. Bestimme die lauteste Situation (mit Begründung):



1. Der Lärm der beiden Trompeten in B und C ist lauter.
2. Der Lärm der Trompete in D ist lauter.
3. Der Lärm ist jeweils gleich.

Hinweis: Die Lautstärke (Schallintensität) I verhält sich zum Abstand d mit $I = 1/d^2$.



Mit der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ist $AD/AC = AB/BC$ und daher

$$AD = (AB \cdot AC)/BC \Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{BC^2}{(AB)^2(AC)^2}.$$

Mit Pythagoras ist zugleich

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{(AB)^2(AC)^2} = \frac{BC^2}{(AB)^2(AC)^2}.$$

Also ist 3. wahr.

(Aussage entspricht dem inversen Satz von Pythagoras)

Liste aller möglichen Wettbewerbe:

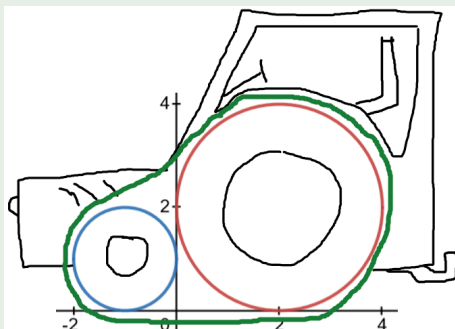
<https://www.mathematik.de/schuelerwettbewerbe>

Besonders empfohlen:

- Bundeswettbewerb Mathematik (BWM) (ab Klasse 8)
<https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik>
- Landeswettbewerb Mathematik BW (LWM)
(Klasse 5-10)
<http://www.landeswettbewerb-mathematik.de/>
- Mathematik-Olympiade (ab Klasse 3)
<https://www.mathe-wettbewerbe.de/mathematik-olympiade/>

Bertas Traktorraupe

Bäuerin Berta will nicht mehr mit ihrem Traktor im moorigen Acker versinken und sucht breite **Reifen** eines Raupenfahrzeugs, um diese zugleich über die beiden Räder des Traktors mit den Radien 1 und 2 (siehe unten) zu ziehen:



Welchen Radius müssen diese **Reifen** mindestens haben?