Mathe-AG Uni Mannheim

Schuljahr 2022/2023

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Die Themen dieses Treffens am 14.10.22

-
-
-
-
-
-
- Probleme bis/für nächste Woche: letzte Folie

Wer ist der Spion?

In der *Undercover Allee* wohnen genau drei Paare, die Müllers, die Meiers und die Bonds. Einer der drei Ehemänner ist ein Spion. Wir wissen, dass ein Paar stets die Wahrheit sagt, dass ein Paar stets lügt und dass ein Paar sich zusammensetzt, aus jemandem, der stets die Wahrheit sagt und jemandem, der stets lügt. Die Paare machen die folgenden Aussagen:

Herr Müller: *Ich bin nicht der Spion.*
Frau Müller: *Herr Bond ist der Spion.*

Herr Meier: *Ich bin nicht der Spion.*
Frau Meier: *Herr Müller ist der Spion.*

Herr Bond: *Herr Müller sagt die Wahrheit.*
Frau Bond: *Herr Meier ist der Spion.*

Wer ist nun also der Spion?

Wenn Herr Müller der Spion ist, dann lügt er und auch Frau Müller lügt dann mit ihrer Aussage. Dann sagen aber auch Herr Bond und Frau Bond beide die Unwahrheit. Somit hätten wir zwei Paare, die gänzlich aus Lügnern bestehen. Das geht nicht, da wir wissen, dass höchstens ein Paar gänzlich lügt.

Wenn Herr Bond der Spion ist, sagt Frau Bond die Unwahrheit. Zudem sagen dann Herr Müller und Frau Müller beide die Wahrheit und damit sagt auch Herr Bond die Wahrheit. Aber es sagt dann auch Herr Meier die Wahrheit und Frau Meier lügt. Damit hätten wir jedoch zwei Paare, die Bonds und die Meiers, die beide genau einen notorischen Lügner beinhalten. Das ist nach Voraussetzung ausgeschlossen, da wir wissen, dass genau ein solches Paar vorliegt.

Also muss Herr Meier der Spion sein. Überprüfen wir die Aussagen: Herr und Frau Meier lügen dann beide. Herr Müller sagt die Wahrheit und Frau Müller lügt. Und das Paar Bond sagt die Wahrheit. Also liegen tatsächlich die drei verschiedenen Verteilungen der Wahrheit bei den drei Paaren vor. Ja, Herr Meier ist der Spion!

Knobelaufgaben

Gleich groß

Zeige in der folgenden Abbildung (zweier sich anschauender Augen), dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleichlang sind.

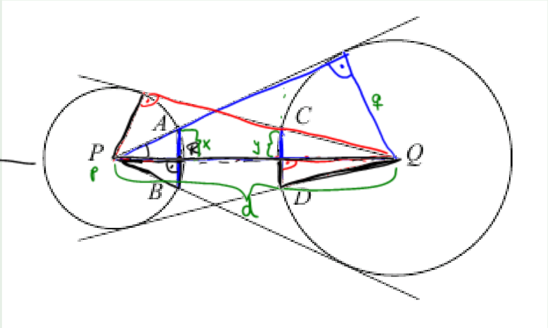
$x = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} = y$

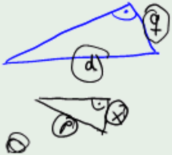
$\frac{d}{p} = \frac{q}{x}$

$\frac{p}{d} = \frac{y}{q}$

gr. rot   klein rd

$\boxed{y = \frac{p \cdot q}{d}}$

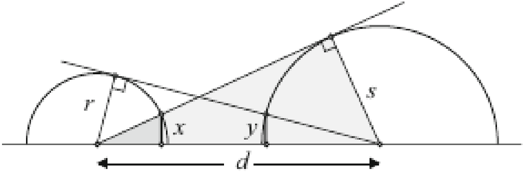




$\frac{q}{d} = \frac{x}{p}$

$\boxed{x = \frac{p \cdot q}{d}}$

Mit $x = \overline{AB}/2$ und $y = \overline{CD}/2$ in der Abbildung



sehen wir: Die beiden schraffierten Dreiecke (das große graue und das kleine dunkelgraue) sind rechtwinklig und haben einen gemeinsamen Winkel (im Mittelpunkt des Kreises mit Radius r). Sie sind also ähnlich. Also ist in diesen Dreiecken (Kathete x zu Hypotenuse r sowie Kathete s zu Hypotenuse d):

$$x/r = s/d \;\Rightarrow\; x = rs/d.$$

Analog sind auch zwei Dreiecke in dem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse d und Kathete r ähnlich (gemeinsamer Winkel in Mittelpunkt des Kreises mit Radius s). Dieses kleine Dreieck: Hypotenuse s, Kathete y. Wir erhalten also auch

$$y/s = r/d \;\Rightarrow\; y = rs/d.$$

Knobelaufgaben

Wenig quadratisch

Beweise: In der Folge der natürlichen Zahlen

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots$$

taucht keine Quadratzahl q^2 für ein $q \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ auf!

zz: $\mathrm{mod}_4(q^2) \neq 3$: Fall 1: q gerade $q = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

Fall 2: q ungerade

$(2k)^2 = 4k^2$

$\mathrm{mod}_4(4k^2) = 0$

Klar sind die ersten Zahlen 1 und 11 keine Quadratzahlen. Es ist also für eine solche Quadratzahl notwendig, dass ein $r \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$q^2 = 11 + 100r = (4 \cdot 2 + 3) + 4 \cdot 25 \cdot r = 4(2 + 25r) + 3. \qquad (1)$$

Andererseits ist q entweder gerade oder ungerade. Das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q = 2n$ oder $q = 2n + 1$. Dann ist aber auch

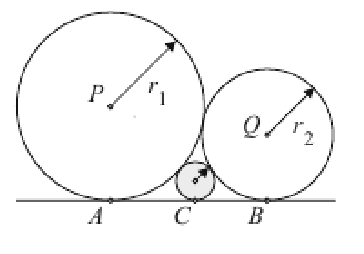
$$q^2 = (2n)^2 = 4n^2 \qquad \text{oder} \quad q^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4(n^2+n)+1$$

Somit ist der Rest der Division von q^2 bezüglich 4 entweder 0 oder 1. Nach der Gleichung (1) wäre jedoch ein Rest von 3 notwendig. Also kann keine Quadratzahl in der Folge vorkommen!

Probleme

Zum Wegkugeln!

In der Abbildung hat der kleinste Kreis den Radius r_3 und es sei $r_1 > r_2 > r_3 > 0$.



Beweise:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Hinweis:
Bestimme zuerst beispielsweise die Länge $\overline{AB}$ nur mittels von r_1 und r_2.