Komplexe Zahlen

Mathe AG

17.03.2023

Inhalt dieser Folge

1. Warum komplexe Zahlen?
2. Kartesische Darstellung

    2.1 Allgemeines

    2.2 Rechnen

    2.3 Gaußsche Zahlenebene

1. Warum komplexe Zahlen?

Welche Zahlenmengen kennt ihr?

1. Warum komplexe Zahlen?

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ⇢ nicht abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existieren nicht)
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Addition, aber: nicht abgeschlossen bzgl. Multiplikation (Multiplikativ Inverse existieren nicht)
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{z_1}{z_2} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\right\}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Multiplikation, aber: nicht abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{e, \pi, \sqrt{2}, \dots\}$

1. Warum komplexe Zahlen?

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ⇢ nicht abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existieren nicht)
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Addition, aber: nicht abgeschlossen bzgl. Multiplikation (Multiplikativ Inverse existieren nicht)
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Multiplikation, aber: nicht abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)
    - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{e, \pi, \sqrt{2}, \dots\}$

Löse die Gleichung $\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$.

1. Warum komplexe Zahlen?

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ⇢ nicht abgeschlossen bzgl. Addition (Additiv Inverse existieren nicht)
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Addition, aber: nicht abgeschlossen bzgl. Multiplikation (Multiplikativ Inverse existieren nicht)
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Multiplikation, aber: nicht abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ⇢ abgeschlossen bzgl. Supremum/Infimum (Vollständigkeitsaxiom!)
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{e, \pi, \sqrt{2}, \dots\}$

ABER: $\mathbb{R}$ **ist nicht abgeschlossen bzgl. algebraischen Gleichungen**

2. Kartesische Darstellung

Definition (Komplexe Zahlen).

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist i die imaginäre Einheit mit $\boldsymbol{i^2 = -1}$, so heißt der Ausdruck

$$z := a + b \cdot i = a + bi$$

eine komplexe Zahl mit Realteil a und Imaginärteil b, geschrieben

$a = Re(z)$, $b = Im(z)$ und $z = Re(z) + i \cdot Im(z)$ (beide sind eindeutig!).

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

2.1 Allgemeines

Zeige, dass $\boldsymbol{i} \neq \sqrt{-\mathbf{1}}$ gilt.

2.1 Allgemeines

Zeige, dass $\boldsymbol{i} \neq \sqrt{\mathbf{-1}}$ gilt.

Beweis durch Widerspruch.

<u>Annahme</u>: $i = \sqrt{-1}$.

$$1 = \sqrt{1} = \cdots$$

2.1 Allgemeines

Zeige, dass $\boldsymbol{i} \neq \sqrt{\mathbf{-1}}$ gilt.

Beweis durch Widerspruch.

Annahme: $\boldsymbol{i} = \sqrt{\mathbf{-1}}$.

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$$

Widerspruch, da $1 \neq -1$ q.e.d.

⇢ man setzt i als eine Lösung von $z^2 = -1$, also gilt $z = \pm i$

2.1 Allgemeines

Mithilfe der eingeführten Notation können wir

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm 3i$$

schreiben.

2.1 Allgemeines

Seien z_1, z_2 zwei beliebige komplexe Zahlen, d.h.
$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i.$
Zeige, dass $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i}$ gilt.

2.1 Allgemeines

Seien z_1, z_2 zwei beliebige komplexe Zahlen, d.h.
$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i.$
Zeige, dass $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i}$ gilt.

Beweis.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 + b_1 i^2 b_2$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

q.e.d.

2.1 Allgemeines

Seien z_1, z_2 zwei beliebige komplexe Zahlen, d.h.
$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i.$
Zeige, dass $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$ gilt.

2.1 Allgemeines

Seien z_1, z_2 zwei beliebige komplexe Zahlen, d.h.
$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i.$
Zeige, dass $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$ gilt.

Tipp: Bruch erweitern.

2.1 Allgemeines

Seien z_1, z_2 zwei beliebige komplexe Zahlen, d.h.
$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i.$
Zeige, dass $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{{a_2}^2+{b_2}^2}}$ gilt.

Beweis.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{\boldsymbol{a_2 - b_2 i}}{\boldsymbol{a_2 - b_2 i}} = \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1 i a_2 - b_1 i^2 b_2}{{a_2}^2 - a_2 b_2 i + b_2 i a_2 - {b_2}^2 i^2}$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 - a_1b_2 i + b_1 i a_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

q.e.d.

2.1 Allgemeines

Definition (Komplexe Konjugation).

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$Re(\bar{z}) = Re(z) \text{ und } Im(\bar{z}) = -Im(z).$$

2.1 Allgemeines

Rechenregeln.

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i,\ \ z_2 = a_2 + b_2 i\ \in \mathbb{C}$, dann gilt:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
- $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$ (komplexe Multiplikation)
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$ (komplexe Division)

⇢ Bei komplexer Multiplikation und komplexer Division muss man vorsichtig sein.

2.1 Allgemeines

Definition (Betrag komplexe Zahl).

Der Betrag der komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

2.1 Allgemeines

Definition (Betrag komplexe Zahl).

Der Betrag der komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2 - (bi)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.2 Rechnen

Aufgabe 1. Berechne und gib den den Real- und Imaginärteil.

1. $(1 + i) - (2 + 3i)$

2. $(2 + 3i)^2$

3. $\frac{1+i}{2-3i}$

4. $|2 + 2i|$

5. $\overline{4 - i}$

2.2 Rechnen

Aufgabe 2. Berechne für $\boldsymbol{z_1 = 1 - 2i}$ und $\boldsymbol{z_2 = 5 + \frac{1}{2}i}$ folgende Zahlen:

1. $z_1 + 4z_2$

2. $|z_1 - 2z_2|$

3. $z_1 \cdot z_2$

4. ${z_2}^2$

Aufgabe 3. Berechne für $\boldsymbol{z_2 = -3 + 4i}$ und $\boldsymbol{z_3 = 6 - 8i}$ folgende Zahlen:

1. $z_2 \cdot \overline{z_2}$

2. $\frac{z_2}{z_3}$

<u>Zusatzaufgabe</u>: Beweise, dass für komplexe Zahlen gilt:

$$\overline{(a+bi)(c+di)} = (a-bi)(c-di)$$

2.2 Rechnen

Aufgabe 4. Gib folgende Zahlen in der Form $a + bi$ an:

1. $\sqrt{-4}$
2. $-\sqrt{-121}$
3. $\sqrt{-2}$
4. $i + i$
5. i^2
6. i^3
7. i^4
8. i^5

2.2 Rechnen

Aufgabe 5. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$:

1. $x^2 + 8 = 0$

2. $x^2 + 2x + 10 = 0$

3. $x^2 + 4x + 5 = 0$

4. $x^2 + x = -1$

5. $x^2 + ix + 1 = 0$

6. $5x^2 + 8ix - 5 = 0$

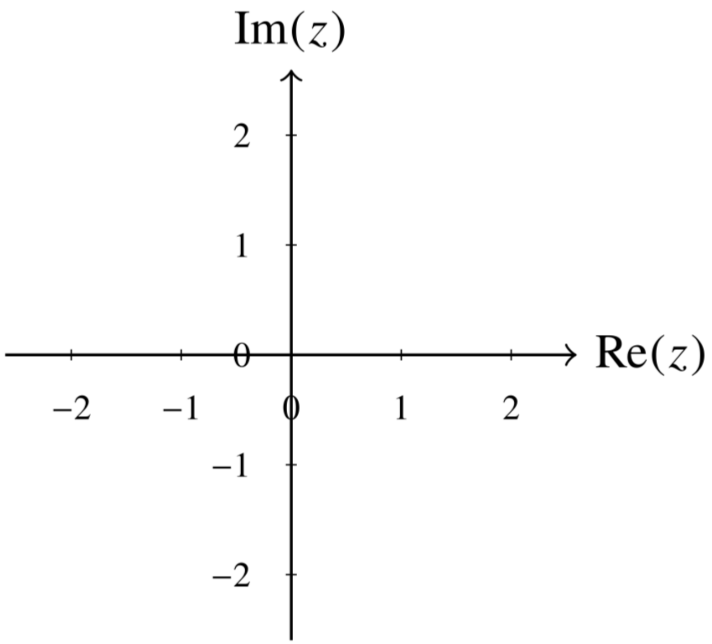
<u>Zusatzaufgabe</u>: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

2.3 Gaußsche Zahlenebene

Geometrisch ist

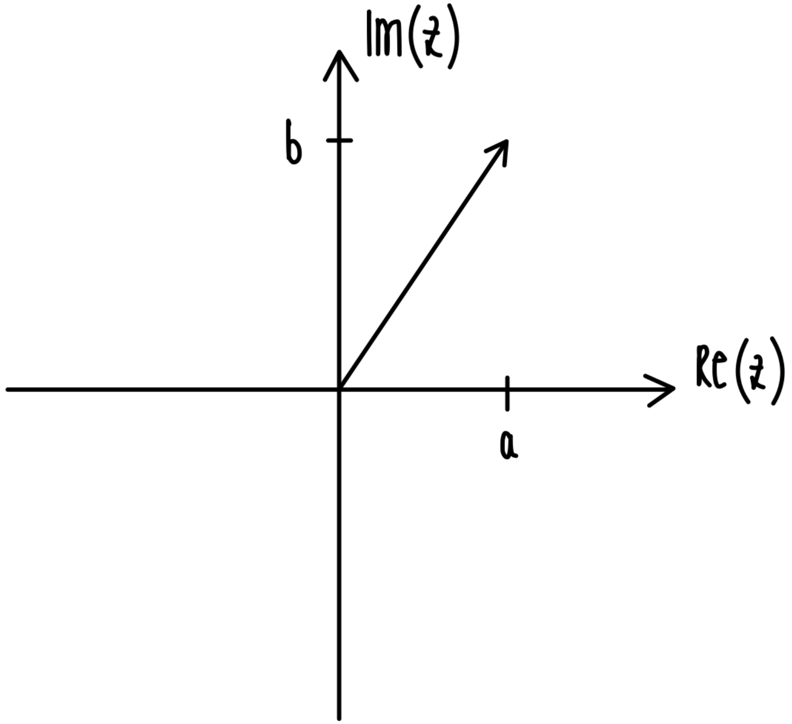
$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexe Ebene**, dargestellt durch $\{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse des Realteils und der y-Achse des Imaginärteils.



2.3 Gaußsche Zahlenebene

Darstellung der komplexen Zahl $z = a + bi$ durch eine Gerade, die bei dem Ursprung beginnt und am Punkt (a, b) endet.



2.3 Gaußsche Zahlenebene

Aufgabe 6. Stelle folgende komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

1. $z_1 = 1 + 5i$

2. $z_2 = -2 + i$

3. $z_1 + z_2$ (mit z_1, z_2 aus Aufgabenteil 1 und 2)

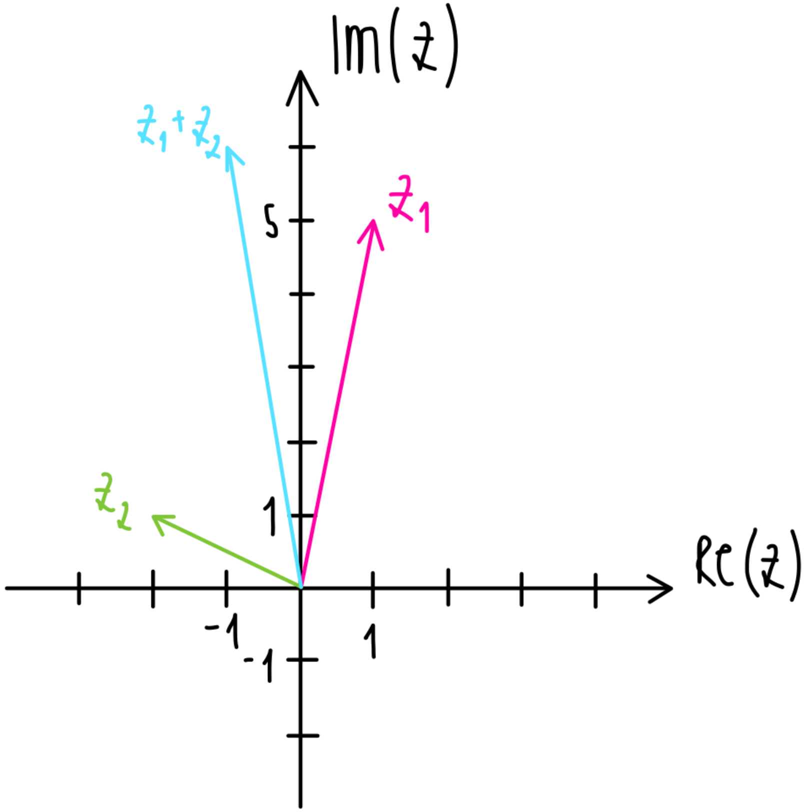
2.3 Gaußsche Zahlenebene

Aufgabe 6. Stelle folgende komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

1. $z_1 = 1 + 5i$

2. $z_2 = -2 + i$

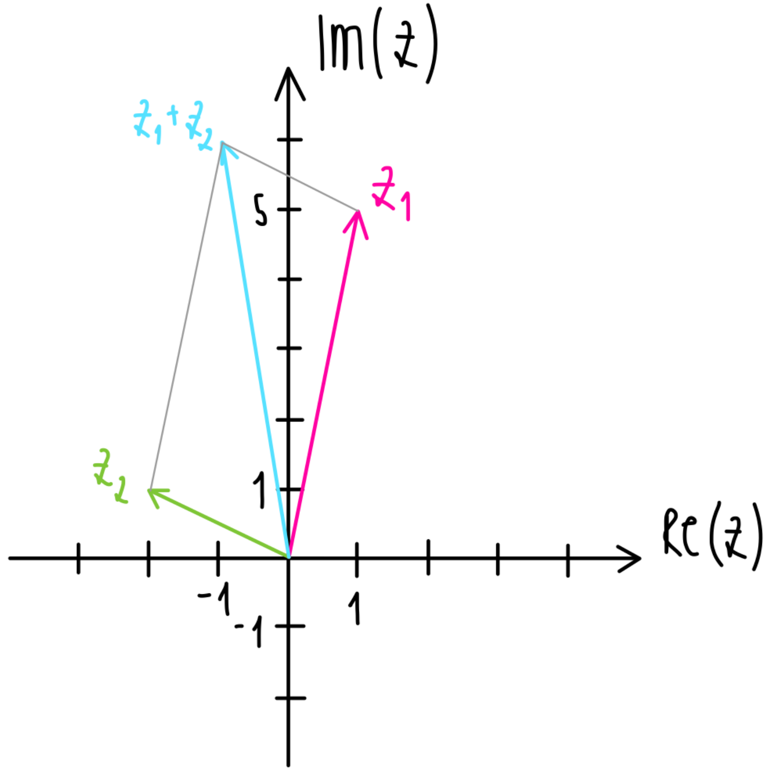
3. $z_1 + z_2$ (mit z_1, z_2 aus Aufgabenteil 1 und 2)



2.3 Gaußsche Zahlenebene

Addition bzw. Subtraktion von komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung

ist analog zur Addition bzw. Subtraktion von zweidimensionalen Vektoren.



2.3 Gaußsche Zahlenebene

Aufgabe 7. Stelle folgende Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

1. $z_1 = 3 + 4i$

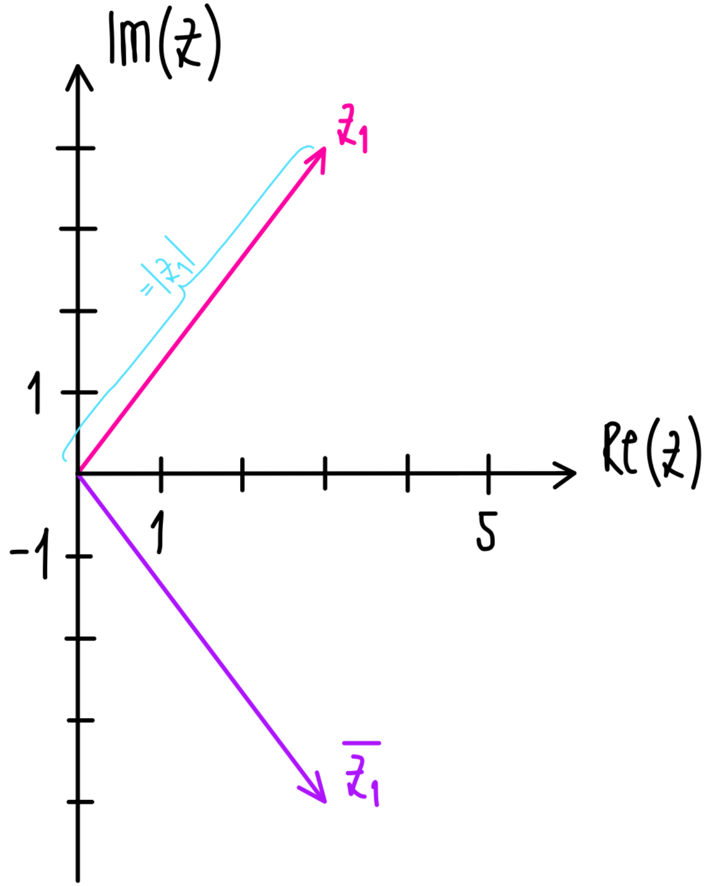
2. $|z_1|$

2.3 Gaußsche Zahlenebene

Aufgabe 7. Stelle folgende Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

1. $z_1 = 3 + 4i$

2. $|z_1|$



2.3 Gaußsche Zahlenebene

Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - bi$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl und es gilt

$$Re(\bar{z}) = Re(z) \text{ und } Im(\bar{z}) = -Im(z).$$

Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse in der komplexen Ebene.

Der **Betrag** der komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist definiert als:

$$|\boldsymbol{z}| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Der Betrag ist die (euklidische) Länge des Vektors in der komplexen Ebene.