Spaß mit Geometrie

Notizen

Mathe-AG 2022/2023

Peter Parczewski

(unkorrigierte erste Version - fortlaufend ergänzt und korrigiert)

6. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Alsina, C. and Nelsen, R.B. *Bezaubernde Beweise: Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik*. Springer Spektrum, (2013).

[2] Alsina, C. and Nelsen, R.B. *Perlen der Mathematik*. Springer Spektrum, (2015).

[3] `www.cut-the-knot.org` (Sammlung an Beweisen und Mathematik von Alexander Bogomolny, University of Iowa)

[4] Kürpig, F. und Niewiadomski, O. *Grundlehre Geometrie - Begriffe, Lehrsätze, Grundkonstruktionen*. Vieweg+Teubner Verlag, (1992).

[5] Lemmermeyer, F. Mathematik à la Carte - Elementargeometrie an Quadratwurzeln mit einigen geschichtlichen Bemerkungen. Springer Spektrum, (2014)

Kapitel 1
Grundbegriffe

- Gegenstände der Mathematik sind **mathematische Sätze** und **Beweise**.
- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage.
- Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann. Es gilt dabei der Grundsatz Tertium non datur (Ein Drittes gibt es nicht. ARISTOTELES) ($\rightsquigarrow$ Aussagenlogik, Logik)
- Der **Beweis** ist eine logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und Definitionen
- Eine **Definition** erklärt einen Begriff oder Zusammenhang durch bereits bekannte Begriffe und Zusammenhänge.
- **Mathematik** ist demnach die Tätigkeit, aus Sätzen und Beweisen, **neue** Sätze und **neue** Beweise zu erzeugen!

In diesem Kapitel führen wir einige für die gesamte Mathematik relevanten Begriffe ein.

1.1 Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann.
Tertium non datur (Ein Drittes gibt es nicht) (ARISTOTELES).

Das sind (aussagenlogische) Aussagen :

- $4 < 7$
- Am 01.11.1822 hat es in Mannheim geregnet
- Es gibt unendlich viele Primzahlen
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^3 < 2^4$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 3 teilbar

Das sind keine (aussagenlogischen) Aussagen:

- Guten Tag!
- 4
- Dieser Satz ist falsch $\rightsquigarrow$ (Paradoxien, Logik)

Sind A und B Aussagen, so bildet man zusammengesetzte Aussagen:

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **logisch äquivalent**)

Die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen werden durch **Wahrheitstabellen** bzw. **Wahrheitstafeln** definiert. Wir kürzen im Weiteren wahr (w) und falsch (f) ab.
Logische Äquivalenz von Aussagen erfolgt ebenfalls durch Betrachtung von Wahrheitstafeln:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$		$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w	w	w		w	w
w	f	w	f	f	f		f	f
f	w	w	f	w	f		w	w
f	f	f	f	w	w		w	w

Also haben wir hier durch die letzten beiden Spalten bewiesen, da diese beiden Spalten übereinstimmen: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.
Zusammengesetzte Aussagen sind:

- Mannheim liegt am Meer und $\pi^3 > \sqrt{11}^3$
- Wenn $4 > 7$, dann ist $\pi < 2$
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$

Satz 1.1. *Für jede Aussage A gilt:*

- $A \vee \neg A$ *ist immer wahr (**Tautologie**).*
- $A \wedge \neg A$ *ist immer falsch.*

1.2 Mengen

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**).
Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert.
Beispiele:

- $\sqrt{2} :=$ die positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst
- Die natürliche Zahl n ($n \geq 1$) ist teilbar durch die natürliche Zahl m $:\Leftrightarrow$ es gibt eine natürliche Zahl k mit $n = mk$

Definition 1.2. *Eine* **Menge** M *ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt* **Elemente**. *Die* **Elementbeziehung** *wird geschrieben als:*

$x \in M$ *bedeutet:* x *ist Element der Menge* M

$x \notin M$ *bedeutet:* x *ist nicht Element der Menge* M $\quad (x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M))$

Definition einer Menge oftmals mittels einer Aussage als Bedingung (geschweiften Klammern!):

$$M := \{x : p(x)\} \qquad \text{bzw.} \qquad M := \{x \,|\, p(x)\}$$

Beispiele:

- Beatles := {John Lennon, Paul McCartney, George Harrison, Ringo Starr}
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (später genauer!)
- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$ (Es gibt hier nur drei verschiedene Elemente!)
- $\{n \in \mathbb{N} : n^2 < 10\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (Reihenfolge in Menge irrelevant!)
- $\{1, 2, \pi, \text{Olaf Scholz}, \{1, 2, 3\}\}$ (Elemente sind beliebig, auch Mengen möglich!)

Mit **Quantoren** wird eine Aussage (mittels Prädikat $A(\cdot)$) über eine Menge M abgekürzt:

$\forall x \in M : A(x)$ bedeutet: **Für alle** Elemente x in M gilt $A(x)$

Statt $\forall x \in M : A(x)$ schreibt man auch $A(x),\ x \in M$

$\exists x \in M : A(x)$ bedeutet: **Es gibt (mindestens) ein** Element x in M, für das $A(x)$ gilt

Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$ (Für alle natürliche Zahlen n gilt $n^2 \geq n$.

  Die Aussage ist also: Es gilt $1^2 \geq 1$ und $2^2 \geq 2$ und usw.
- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 11$ (Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n^2 = 11$)
- $n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$ (Definition: gerade bedeutet durch 2 teilbar)

Relationen und Definitionen für Mengen A und B:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow\ \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow\ (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	**Gleichheit** (für Mengen!)
$A \subset B\ (A \subsetneqq B) :\Leftrightarrow\ (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$	A **echte Teilmenge** von B
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**, Menge von **2-Tupeln**
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	**Komplement** von B in A
A, B **disjunkt** $:\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$	(disjunkte Vereinigung auch als $A \dot\cup B$)

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\},\ \{1, 2\} \cap \{0, 1, 5\} = \{1\}$ und $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ $(= 2\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N})$
- $\{n \in \mathbb{N} : n > 2\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 10\} = \{3\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$
- $A_1 \times \cdots \times A_N := \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : x_1 \in A_1, \ldots, x_N \in A_N\}$ Menge von **N-Tupeln**

Beachte den Unterschied:

- **Menge**: $\{\dots\}$ - geschweifte Klammern - Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
- **Tupel/Vektor**: $(\dots)$ - runde Klammern - Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

Wichtige Zahlenmengen:

- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen : $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$
- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge $M\ :\ \emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- **Natürliche Zahlen mit Null** $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Primzahlen** $\mathrm{Prim} := \{n : n \geq 2, n \text{ hat nur die Teiler } 1 \text{ und } n\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl). Es gilt: $\mathrm{Prim} \subsetneqq \mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Beispiele:

- $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!

- **Intervalle**

  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\ (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffene Intervalle)

$-\infty$ und ∞ sind nur am offenen Rand eines Intervalls zugelassen, z.B. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (offenes Intervall). $[0, \infty)$ sind die nichtnegativen reellen Zahlen, $(0, \infty)$ die positiven reellen Zahlen.

Beispiel:

- Das Intervall $[0, 1]$ sind alle reellen Zahlen ≥ 0 und zugleich ≤ 1

Kapitel 2
Geometrie

Die Elementargeometrie (euklidische Geometrie der zweidimensionalen Ebene und des dreidimensionalen Raumes) beginnt mit **Punkten**, **Geraden** und **Ebenen**. Dabei ist jedes dieser Objekte von einer höheren Struktur und enthält die vorherigen als Elemente. Hierbei hat ein Punkt die Dimension Null (da er keine Ausdehnung, Länge, Fläche etc. besitzt), eine Gerade hat die Dimension 1 (weil sie eine Länge besitzt) und eine Ebene die Dimension 2 (weil sie eine Fläche besitzt).
Weitere Grundbegriffe: parallel, senkrecht, Lot, Strahl (Halbgerade, hat nur Anfang), Strahlenbündel, Strecke (hat Anfang und Ende), Mittelpunkt einer Strecke, Mittelsenkrechte.

Fakten zur Elementbeziehung der Objekte:

- Jede Gerade enthält unendlich viele verschiedene Punkte.
- Jeder Punkt in der Ebene liegt auf unendlich vielen Geraden (durch diesen Punkt).
- Jede Ebene enthält unendlich viele verschiedene Geraden.
- Jede Gerade im Raum liegt auf unendlich vielen Ebenen (durch diese Gerade).
- Jede Gerade ist eindeutig durch zwei verschiedene Punkte determiniert.
- Jede Ebene ist eindeutig durch drei verschiedene Punkte determiniert (oder durch disjunkte Punkt und Gerade; oder durch zwei verschiedene Geraden).
- **Parallelenpostulat**: Zu jeder Gerade g und jedem Punkt P nicht auf der Gerade g gibt es genau eine Parallele zu g durch P.

In der Elementargeometrie werden dann Vielecke und Kreise studiert. Die einfachsten Vielecke sind Dreiecke. Zwei Figuren in der Ebene sind **ähnlich**, falls die eine Figur durch Verschiebungen, Streckungen und Drehungen aus der anderen hervorgeht.

Fakten über Ähnlichkeit und Dreiecke (siehe auch Abbildung 2.1):

(1) Zwei Geraden in der Ebene mit genau einem Schnittpunkt haben gleiche gegenüberliegende Winkel. (Folgt aus Summe Winkel auf einer Seite einer Gerade beträgt $180°$.)

(2) **Stufenwinkelsatz**: Schneiden zwei Parallelen eine dritte Gerade in jeweils genau einem Schnittpunkt, dann sind die Winkel (spitzer und stumpfer Winkel) gleich. $((1) \Rightarrow (2))$

(3) Die Summe der drei Innenwinkel in einem Dreieck beträgt $180°$. $((1) - (2) \Rightarrow (3))$

(4) Zwei ähnliche Dreiecke haben gleiche Winkel und gleiche Verhältnisse der jeweiligen Seitenlängen (z.b. kürzeste Seite zu längste Seite). ((1) – (3) ⇒ (4))

(5) **Ähnlichkeitssätze** △: Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie zwei Winkel gemeinsam haben (oder zwei Verhältnisse der jeweiligen Seitenlängen. ((1) – (4) ⇒ (5))

(6) **Strahlensatz**: Schneiden zwei Geraden mit genau einem Schnittpunkt Parallelen, so sind die Verhältnisse der Strecken auf den Strahlen gleich. ((1) – (5) ⇒ (6))

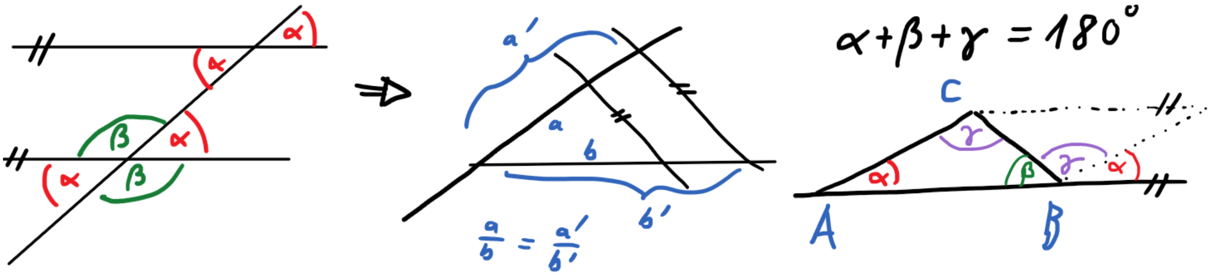
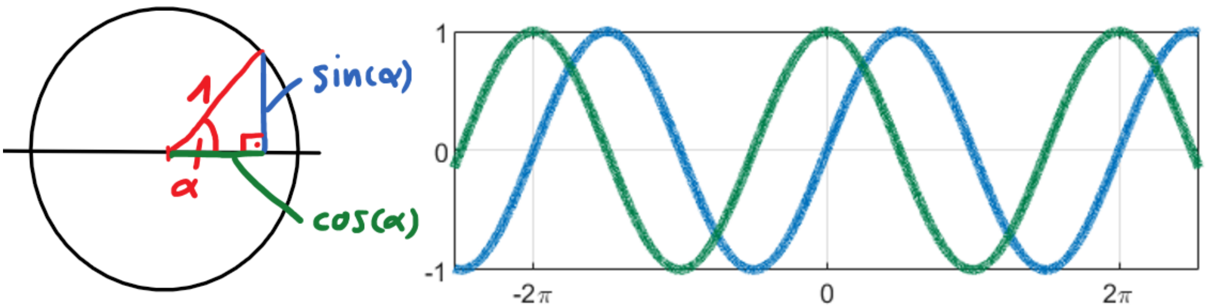


Abbildung 2.1: Ähnlichkeit und Strahlensatz

(Geometrische) Definition **Sinus** und **Kosinus** im Einheitskreis (360° entspricht 2π):



Zudem ist bei einem rechtwinkligen Dreieck auch der **Tangens**:

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}, \quad \cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}, \quad \tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

(7) **Pythagoras**: Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c und den Katheten a und b gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(Viele Beweise vorhanden, auf `www.cut-the-knot.org` findet man 122 (!) verschiedene Beweise)

(8) **Kosinussatz**: Für ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

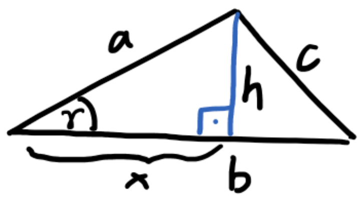
Im Einheitskreis gilt natürlich (mit Pythagoras) für alle α:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Es gelten zudem die Symmetrien:

$$\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha), \quad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha), \quad \cos(\alpha) = \sin(\alpha + 90°)$$

Beweis Kosinussatz. Mit Pythagoras ist für Bezeichnungen in



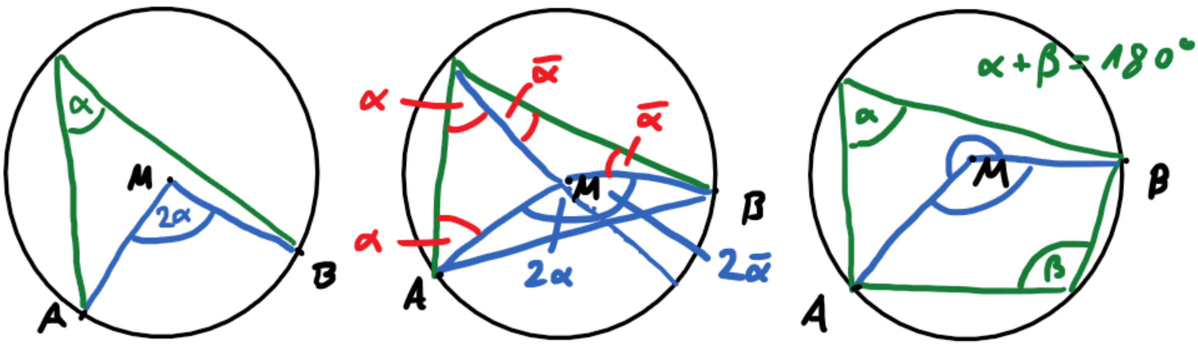
$$a^2 = x^2 + h^2, \quad c^2 = h^2 + (b-x)^2, \quad \cos(\gamma) = x/a \Leftrightarrow x = a\cos(\gamma)$$

und somit

$$c^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

□

Zentrumwinkel und Peripheriewinkelsatz



(9) **Zentrumwinkel**: Für eine Sehne in eine Kreis ist der Winkel im Mittelpunkt (Zentrumwinkel 2α) konstant (erste Figur)

(10) **Peripheriewinkelsatz**: Für eine Sehne in eine Kreis ist der Winkel in eim dritten Punkt (Peripheriewinkel α) der halbe Zentrumwinkel (Beweisidee: zweite Figur)

(11) **Sehnenviereck**: In einem Sehnenviereck haben gegenüberliegende Winkel die Summe $180°$ (dirtte Figur) (Folgt aus (10))

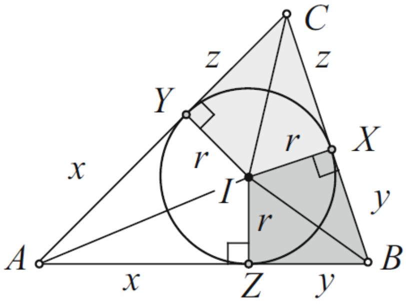
2.1 Formeln von Heron und Brahmagupta

Satz 2.1 (Formel von Heron). *Ein beliebiges Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und $s = \frac{a+b+c}{2}$ hat die Fläche*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Man kann den Satz direkt mit Kosinussatz nachrechnen. Wir verwenden einen eleganteren Beweis aus [1].

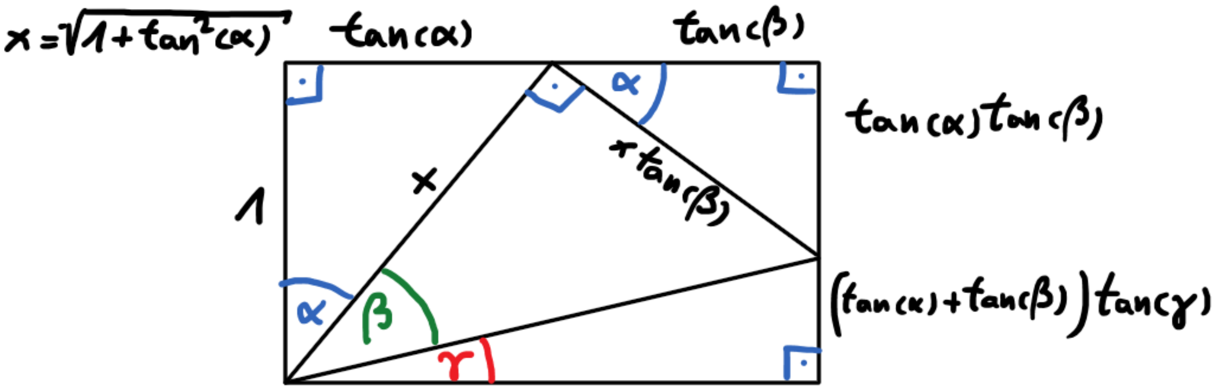
Beweis. Zuerst beobachten wir für das beliebige Dreieck eine Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke mittels dem Innenkreis:



Damit erhalten wir für die Fläche des Dreiecks F:

$$s = x + y + z, \qquad F = r(x + y + z)$$

Nun machen wir eine Beobachtung über Produkte vom Tangens mittels Pythagoras:



Für $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ gilt also

$$\tan(\alpha)\tan(\beta) + \tan(\alpha)\tan(\gamma) + \tan(\beta)\tan(\gamma) = 1$$

Für unsere rechtwinkligen Dreiecke im Dreieck $\triangle ABC$ ist aber

$$\tan(\alpha/2) = r/x, \quad \tan(\beta/2) = r/y, \quad \tan(\gamma/2) = r/z, \quad \alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90°$$

Also ergibt die Identität für Tangens Produkte auch

$$r^2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xz}\right) = r^2\frac{x+y+z}{xyz} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2(x+y+z) = xyz$$

Somit folgt

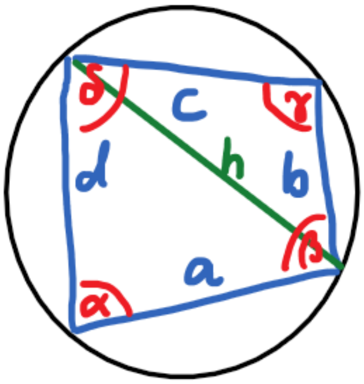
$$F^2 = r^2(x+y+z)^2 = (x+y+z)xyz \quad \Leftrightarrow \quad F\sqrt{(x+y+z)xyz}$$

Mit $s = x + y + z$ und $xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$ folgt die Aussage. □

Satz 2.2 (Formel von Brahmagupta). *Ein beliebiges Sehnenviereck mit den Seitenlängen a, b, c, d und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ hat die Fläche*

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Beweis. Sei das Sehnenviereck mit den Bezeichnungen wie folgt:



Wir zerlegen die Fläche des Sehnenvierecks in zwei Dreiecke mit der gemeinsamen Seite h wie oben, dies ergibt die Fläche

$$F = \frac{1}{2} ad \sin(\alpha) + \frac{1}{2} cb \sin(\gamma)$$

Mittels (11) ist $\alpha + \gamma = 180°$ und daher $\sin(\alpha) = \sin(\gamma)$. Somit folgt für die Fläche des Sehnenvierecks

$$F^2 = \frac{1}{4} (ad + bc)^2 \sin^2(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad 4F^2 = (ad + bc)^2 \left(1 - \cos^2(\alpha)\right)$$

Mit Kosinussatz ist nun in den zwei Dreiecken mit $\cos(\alpha) = -\cos(\gamma)$:

$$a^2 + d^2 = h^2 - 2ad\cos(\alpha), \quad b^2 + c^2 = h^2 - 2bc\cos(\gamma) = h^2 + 2bc\cos(\alpha)$$

Also erhalten wir

$$(ad + bc)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(h^2 - a^2 - d^2 + b^2 + c^2 - h^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right)$$

und damit auch

$$4F^2 = (ad + bc)^2 - \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right)^2$$

Andererseits erhalten wir durch Nachrechnen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (-a + b + c + d)(a + b + c - d) &= -a^2 - d^2 + b^2 + c^2 + 2ad + 2bc, \\ (a - b + c + d)(a + b - c + d) &= -b^2 - c^2 + a^2 + d^2 + 2ad + 2bc, \\ (-x + y + z)(x - y + z) &= -x^2 - y^2 + z^2 + 2xy. \end{aligned}$$

Damit folgt für $4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) \\ &= \frac{1}{4}\left(-(a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) + (2ad + 2bc)\right)\left((a^2 + d^2) - (b^2 + c^2) + (2ad + 2bc)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-(a^2 + d^2)^2 - (b^2 + c^2)^2 + (2ad + 2bc)^2 + 2(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)\right) \\ &= (ad + bc)^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 \end{aligned}$$

□