# Mathematisches Präludium

## Ein Mathematik Vorkurs - Übungen Funktionen

Peter Parczewski

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$
- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$
- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$
- $f(x) = 2^x$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$
- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$
- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = 2^{1/x}$

# Funktionen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ **Ja**
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$ **Ja**
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$ **Ja**
- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ **Nein, da für $x = -1$ nicht definiert**
- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$ **Ja**
- $f(x) = 2^x = e^{x \ln(2)}$ **Ja**
- $f(x) = 2^{1/x}$ **Nein, da für $x = 0$ nicht definiert**

# Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x}$

# Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2^x}$

# Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2^x}$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(\pi x^2)$

# Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2^x}$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(\pi x^2)$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \frac{1+2^x}{x-x^2}$

# Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2^x}$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(\pi x^2)$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \frac{1+2^x}{x-x^2}$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \frac{x-1}{1+2^x}$

# Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x}$ **Ja**
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{2^x}$ **Ja**
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(\pi x^2)$ **Ja**
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \frac{1+2^x}{x-x^2}$ **Nein, nicht definiert für** $x = 0$
- $f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \frac{x-1}{1+2^x}$ **Nein, da** $f(x) < 0$ **für** $x > 0$

# Funktionen 3 - Aufgabe

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

**injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

**surjektiv** $:\Leftrightarrow f(A) = B$

**bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv ($f$ heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** $f$.

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$

# Funktionen 3 - Aufgabe

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

**injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

**surjektiv** $:\Leftrightarrow f(A) = B$

**bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv ($f$ heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** $f$.

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \to \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$

# Funktionen 3 - Aufgabe

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

**injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

**surjektiv** $:\Leftrightarrow f(A) = B$

**bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv ($f$ heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** $f$.

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \to \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**obere Gaußklammer**)

# Funktionen 3 - Aufgabe

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

**injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

**surjektiv** $:\Leftrightarrow f(A) = B$

**bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv ($f$ heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** $f$.

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \to \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**obere Gaußklammer**)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ (**untere Gaußklammer**)

# Funktionen 3 - Aufgabe

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$ **nur injektiv**
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \to \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$ **weder injektiv noch surjektiv**
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**obere Gaußklammer**) **nur surjektiv**
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ (**untere Gaußklammer**) **nur surjektiv**