Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Übungen Aussagen

Peter Parczewski

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Werte genau zwei Mal annimmt.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Werte genau zwei Mal annimmt.
- Es gibt noch unentdeckte Säugetiere auf der Erde.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Werte genau zwei Mal annimmt.
- Es gibt noch unentdeckte Säugetiere auf der Erde.
- Deutschland wird Fußball-Europameister 2024.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Werte genau zwei Mal annimmt.
- Es gibt noch unentdeckte Säugetiere auf der Erde.
- Deutschland wird Fußball-Europameister 2024.
- Auf einer Kirchenorgel sollte nur Bach gespielt werden.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Werte genau zwei Mal annimmt.
- Es gibt noch unentdeckte Säugetiere auf der Erde.
- Deutschland wird Fußball-Europameister 2024.
- Auf einer Kirchenorgel sollte nur Bach gespielt werden.
- Vorhersagen sind schwierig, besonders wenn sie die Zukunft betreffen.

Aussagen 1 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup. **Nein**
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London. **Ja, falsch**
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Werte genau zwei Mal annimmt. **Ja**
- Es gibt noch unentdeckte Säugetiere auf der Erde. **Ja, sehr wahrscheinlich**
- Deutschland wird Fußball-Europameister 2024. **Ja, vermutlich falsch**
- Auf einer Kirchenorgel sollte nur Bach gespielt werden. **Nein**
- Vorhersagen sind schwierig, besonders wenn sie die Zukunft betreffen. **Nein**

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z.
- Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist es keine Primzahl.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z.
- Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist es keine Primzahl.
- Es gibt zwei verschiedene reelle Zahlen x und y.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z.
- Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist es keine Primzahl.
- Es gibt zwei verschiedene reelle Zahlen x und y.
- Die Zahl ist ≥ 0.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z.
- Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist es keine Primzahl.
- Es gibt zwei verschiedene reelle Zahlen x und y.
- Die Zahl ist ≥ 0.
- Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n mit $n \geq \pi^{1000}$.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade.
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z.
- Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist es keine Primzahl.
- Es gibt zwei verschiedene reelle Zahlen x und y.
- Die Zahl ist ≥ 0.
- Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n mit $n \geq \pi^{1000}$.
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge m, n mit $m, n \geq \pi^{1000}$.

Aussagen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Jede natürliche Zahl n ist gerade oder ungerade. **Ja, wahr**
- Für alle $x, y, z \geq 0$ existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z. **Ja, falsch**
- Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist es keine Primzahl. **Ja, falsch**
- Es gibt zwei verschiedene reelle Zahlen x und y. **Ja, wahr**
- Die Zahl ist ≥ 0. **Nein**
- Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n mit $n \geq \pi^{1000}$. **Ja, wahr**
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge m, n mit $m, n \geq \pi^{1000}$. **Ja, unbekannt**

Aussagen - Erinnerung

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B)
	(A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **äquivalent**)
	d.h. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Aussagen 3 - Multiple Choice

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

$A \Rightarrow B$: A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A

Gegeben sind die beiden Aussagen

A Das Viereck ist ein Quadrat

B Die Diagonalen des Vierecks stehen senkrecht aufeinander

Dann gilt:

- **A** A ist notwendig für B.
- **B** A hinreichend für B.
- **C** A ist notwendig und hinreichend für B
- **D** A ist weder notwendig noch hinreichend für B.

Aussagen 3 - Multiple Choice

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

$A \Rightarrow B$: A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A

Gegeben sind die beiden Aussagen

A Das Viereck ist ein Quadrat

B Die Diagonalen des Vierecks stehen senkrecht aufeinander

Dann gilt:

A. A ist notwendig für B.
B. A hinreichend für B. ✓ da hier $A \Rightarrow B$
C. A ist notwendig und hinreichend für B
D. A ist weder notwendig noch hinreichend für B.

Aussagen 4 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 = 9 \text{ ??? } x = 3$$

- A $\Leftarrow$
- B $\Rightarrow$
- C $\Leftrightarrow$
- D $=$

Aussagen 4 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 = 9 \text{ ??? } x = 3$$

A. $\Leftarrow$ ✓
B. $\Rightarrow$
C. $\Leftrightarrow$
D. $=$

Aussagen 5 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 = 9 \text{ ??? } x = 3 \text{ oder } x = -3$$

- **A** $\Leftarrow$
- **B** $\Rightarrow$
- **C** $\Leftrightarrow$
- **D** $=$

Aussagen 5 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 = 9 \text{ ??? } x = 3 \text{ oder } x = -3$$

- **A** $\Leftarrow$ ✓
- **B** $\Rightarrow$ ✓
- **C** $\Leftrightarrow$ ✓
- **D** $=$

Aussagen 6 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x = \sqrt{9} \text{ ??? } x = 3 \text{ oder } x = -3$$

- A $\Leftarrow$
- B $\Rightarrow$
- C $\Leftrightarrow$
- D $=$

Aussagen 6 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x = \sqrt{9} \text{ ??? } x = 3 \text{ oder } x = -3$$

- A $\Leftarrow$
- B $\Rightarrow$ ✓
- C $\Leftrightarrow$
- D $=$

Aussagen 7 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \neq a \cdot b \text{ für alle } a, b \in \mathbb{N} \text{ ??? } n \text{ ist prim}$$

A. $\Leftarrow$
B. $\Rightarrow$
C. $\Leftrightarrow$
D. Kein Symbol ergibt eine wahre Aussage

Aussagen 7 - Multiple Choice

Mit dem folgenden Symbol entsteht eine wahre Aussage: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \neq a \cdot b \text{ für alle } a, b \in \mathbb{N} \text{ ??? } n \text{ ist prim}$$

A. $\Leftarrow$
B. $\Rightarrow$
C. $\Leftrightarrow$
D. Kein Symbol ergibt eine wahre Aussage ✓

Aussagen 8 - Aufgabe

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Untersuche den Wahrheitswert (durch Wahrheitswerttabellen) der zusammengesetzten Aussagen (aus den Aussagen A und B):

- $(A \vee B) \Rightarrow B$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge A$
- Folgere (ohne weitere Tabellen), welche Aussage wahr ist:
  - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
  - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
  - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$

Aussagen 8 - Aufgabe

Untersuche den Wahrheitswert (durch Wahrheitswerttabellen) der zusammengesetzten Aussagen (aus den Aussagen A und B):

- $(A \vee B) \Rightarrow B$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge A$
- Folgere (ohne weitere Tabellen), welche Aussage wahr ist:
  - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
  - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
  - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$

Lösung:

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B)$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge A$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	f
f	f	f	w	w	f

- Wahrheitswerte von $(A \vee B) \Rightarrow B$ und $(A \Leftrightarrow B) \wedge A$ nicht identisch
- Nur Aussage $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$ immer wahr (d.h. Tautologie)

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)$

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \leq 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0$

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$ **Ja, wahr**

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$ **Ja, wahr**
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$ **Nein**

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$ **Ja, wahr**
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$ **Nein**
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ **Ja, wahr**

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$ **Ja, wahr**
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$ **Nein**
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ **Ja, wahr**
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**

Aussagen 9 - JA/NEIN

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**
- $x^2 > 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$ **Ja, wahr**
- Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 - 4$ **Nein**
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ **Ja, wahr**
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)$ **Nein**
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \leq 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0$ **Ja, falsch**

Aussagen 10 - Aufgabe

Donald und Boris verhandeln. Donald sagt von Montag bis Freitag und Boris von Montag bis Donnerstag stets die Unwahrheit. An den restlichen Tagen sagen Sie stets die Wahrheit. Sie begegnen sich beim Frühstück:

Boris: Gestern habe ich nur gelogen.
Donald: Ich auch.

Welcher Tag ist heute?

Aussagen 10 - Aufgabe

Donald und Boris verhandeln. Donald sagt von Montag bis Freitag und Boris von Montag bis Donnerstag stets die Unwahrheit. An den restlichen Tagen sagen Sie stets die Wahrheit. Sie begegnen sich beim Frühstück:

Boris: Gestern habe ich nur gelogen.
Donald: Ich auch.

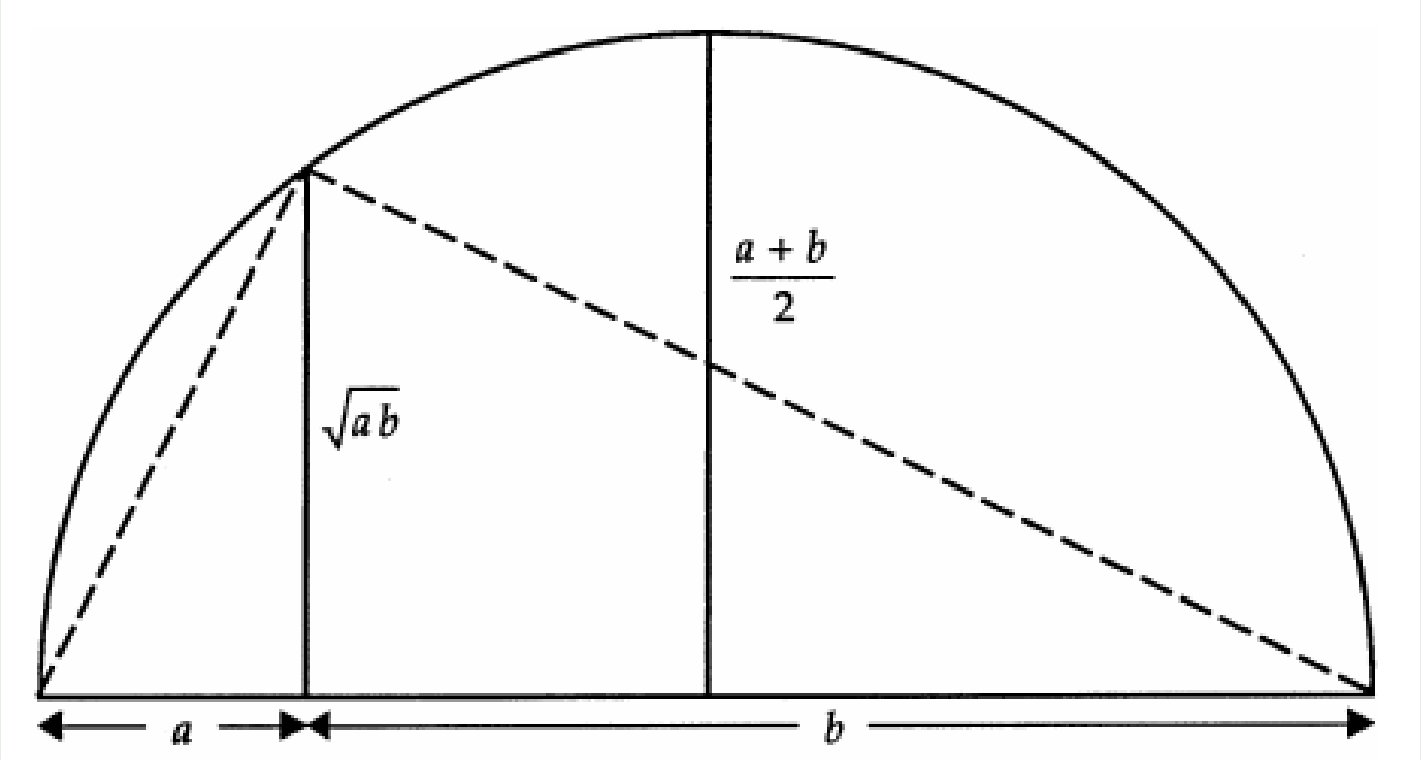
Welcher Tag ist heute?

Lösung:

- Jeder sagt entweder Wahrheit und Unwahrheit
- Sagt er die Wahrheit, dann war am Vortag ein Tag der Unwahrheit
- Sagt er die Unwahrheit, dann war am Vortag ein Tag der Wahrheit
- Boris kann diese Aussage nur am Freitag (sagt die Wahrheit) oder Montag (sagt die Unwahrheit) machen
- Donald kann diese Aussage nur am Samstag (sagt die Wahrheit) oder Montag (sagt die Unwahrheit) machen
- Also ist Montag

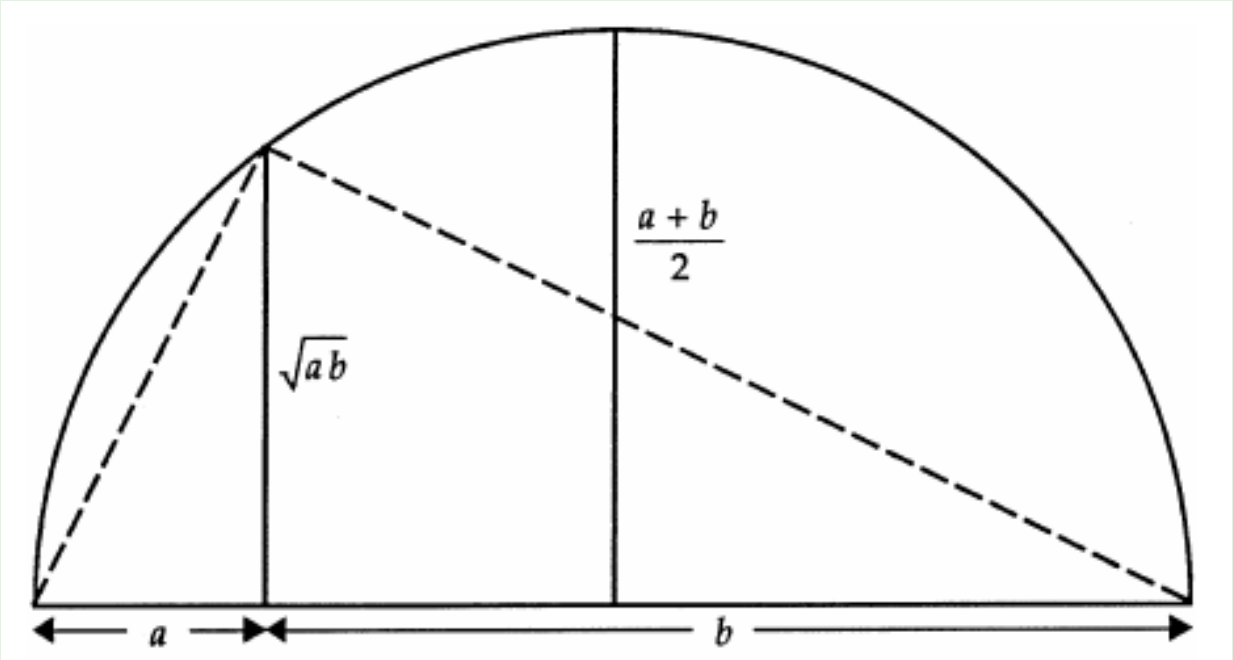
Aus Einführung 11 - Aufgabe

Begründen Sie die eingezeichneten Längen $\sqrt{ab}$ und $\frac{a+b}{2}$:



Aus Einführung 11 - Aufgabe

Begründen Sie die eingezeichneten Längen $\sqrt{ab}$ und $\frac{a+b}{2}$:



Lösung:

- Der Radius ist klar $(a+b)/2$
- Höhe h im rechtwinkligen Dreieck: Änlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke: $a/h = h/b \Rightarrow h = \sqrt{ab}$
- Alternative: Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

12 - Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine einfache Formel für die Summe

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = ?$$

12 - Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine einfache Formel für die Summe

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = ?$$

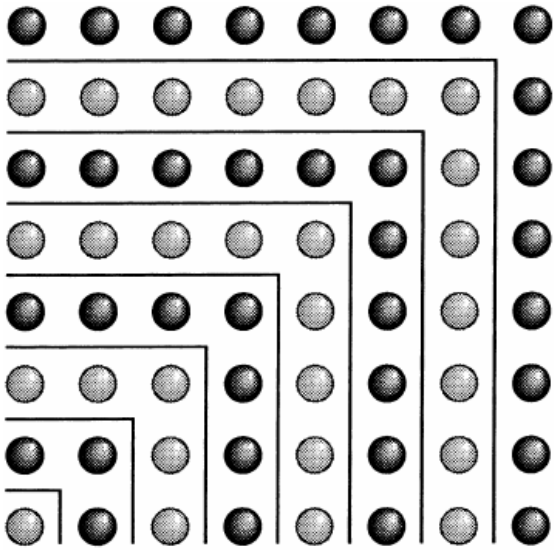
Hilfreiche **Visualisierung:**

12 - Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine einfache Formel für die Summe

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = ?$$

Hilfreiche **Visualisierung:**

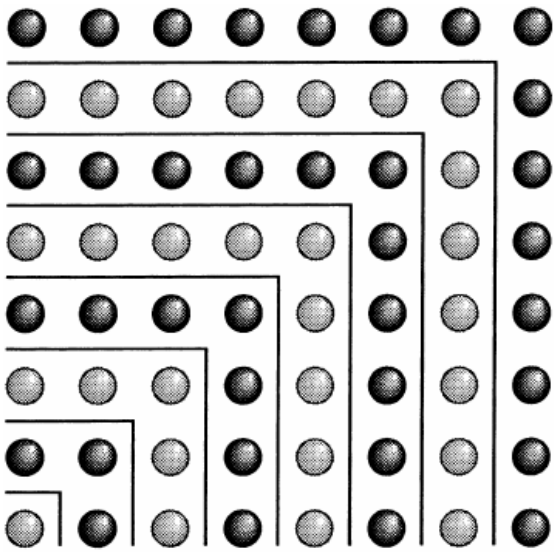


12 - Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine einfache Formel für die Summe

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = ?$$

Hilfreiche **Visualisierung:**



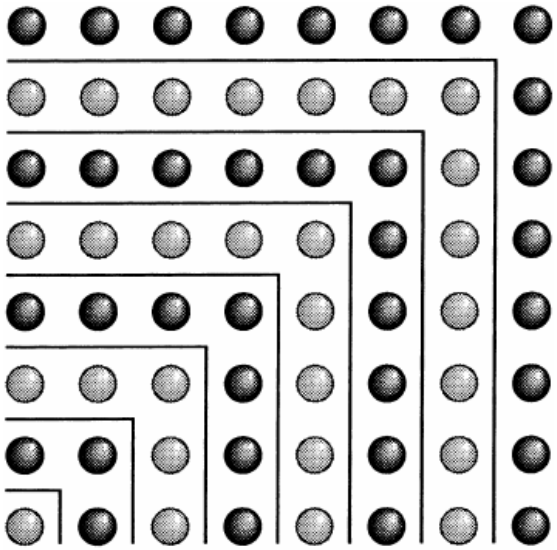
Aus der Figur erhalten wir direkt die Lösung mitsamt Beweisidee:

12 - Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine einfache Formel für die Summe

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = ?$$

Hilfreiche **Visualisierung:**



Aus der Figur erhalten wir direkt die Lösung mitsamt Beweisidee:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$