# Mathematisches Präludium

## Ein Mathematik Vorkurs - Übungen 3

Peter Parczewski

# Erinnerung - Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen

1. Direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
2. Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
3. Beweis durch Widerspruch ($\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightsquigarrow !$ )

die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Also ist hier für $a = x + 1, b = 1, c = -1$: $x \leq 0$, das ist gerade die Negation von $x > 0$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Also ist hier für $a = x + 1, b = 1, c = -1$: $x \leq 0$, das ist gerade die Negation von $x > 0$.

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, es ist $x > 0$ und nicht $x + 1 > 1$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Also ist hier für $a = x + 1, b = 1, c = -1$: $x \leq 0$, das ist gerade die Negation von $x > 0$.

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, es ist $x > 0$ und nicht $x + 1 > 1$.

- Dann ist also $x > 0$ und $x + 1 \leq 1$.

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Also ist hier für $a = x + 1, b = 1, c = -1$: $x \leq 0$, das ist gerade die Negation von $x > 0$.

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, es ist $x > 0$ und nicht $x + 1 > 1$.

- Dann ist also $x > 0$ und $x + 1 \leq 1$.
- Wie verwenden wieder: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

# Beweise 1 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Also ist hier für $a = x + 1, b = 1, c = -1$: $x \leq 0$, das ist gerade die Negation von $x > 0$.

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, es ist $x > 0$ und nicht $x + 1 > 1$.

- Dann ist also $x > 0$ und $x + 1 \leq 1$.
- Wie verwenden wieder: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- Für $a = 0, b = x, c = 1$ folgt also insgesamt $1 = 0 + 1 < x + 1 \leq 1$, d.h. $1 < 1$ ein Widerspruch!

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen

1. Direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
2. Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
3. Beweis durch Widerspruch ($\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightsquigarrow !$ )

die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und $p$)

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und $p$)

- Eine natürliche Zahl ist nur gerade, wenn sie den Teiler 2 hat, also ist $p$ ungerade.

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und $p$)

- Eine natürliche Zahl ist nur gerade, wenn sie den Teiler 2 hat, also ist $p$ ungerade.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $p \in \mathbb{N}$ ist ungerade, d.h. $p$ ist gerade.

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und $p$)

- Eine natürliche Zahl ist nur gerade, wenn sie den Teiler 2 hat, also ist $p$ ungerade.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $p \in \mathbb{N}$ ist ungerade, d.h. $p$ ist gerade.

- Dann hat $p$ den Teiler 2 (oder ist gar selbst 2) und ist insbesondere keine Primzahl

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und $p$)

- Eine natürliche Zahl ist nur gerade, wenn sie den Teiler 2 hat, also ist $p$ ungerade.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $p \in \mathbb{N}$ ist ungerade, d.h. $p$ ist gerade.

- Dann hat $p$ den Teiler 2 (oder ist gar selbst 2) und ist insbesondere keine Primzahl

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, es ist $p > 2$ Primzahl und nicht ungerade.

# Beweise 2 - Aufgabe

Beweisen Sie jeweils mit allen drei Beweisen die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

**Lösung:**

**Direkter Beweis:** Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und $p$)

- Eine natürliche Zahl ist nur gerade, wenn sie den Teiler 2 hat, also ist $p$ ungerade.

**Beweis durch Kontraposition:** Angenommen, es gilt Negation von $p \in \mathbb{N}$ ist ungerade, d.h. $p$ ist gerade.

- Dann hat $p$ den Teiler 2 (oder ist gar selbst 2) und ist insbesondere keine Primzahl

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, es ist $p > 2$ Primzahl und nicht ungerade.

- Dann ist $p$ gerade und hat somit den Teiler 2, zugleich hat sie als Primzahl nur die Teiler 1 und $p > 2$, ein Widerspruch!

# Beweise 3 - Aufgabe

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$. Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$

# Beweise 3 - Aufgabe

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$. Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

# Beweise 3 - Aufgabe

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$. Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

**Lösung:**

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ ist im allgemeinen falsch. Bsp.
  $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2\}$, so ist $|A \cup B| = 2 \neq 2 + 1 = |A| + |B|$

# Beweise 3 - Aufgabe

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$. Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

**Lösung:**

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ ist im allgemeinen falsch. Bsp. $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2\}$, so ist $|A \cup B| = 2 \neq 2 + 1 = |A| + |B|$
- **Beobachtung**: $A \cup B = A \setminus B \cup B \setminus A \cup (A \cap B)$

# Beweise 3 - Aufgabe

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$.
Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

**Lösung:**

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ ist im allgemeinen falsch. Bsp.
  $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2\}$, so ist $|A \cup B| = 2 \neq 2 + 1 = |A| + |B|$
- **Beobachtung**: $A \cup B = A \setminus B \cup B \setminus A \cup (A \cap B)$
- **Hinweis**: Aussage ist wahr für disjunkte Mengen $A, B$ mit $A \cap B = \emptyset$

# Beweise 3 - Aufgabe

Seien $A$ und $B$ endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$.
Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

**Lösung:**

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ ist im allgemeinen falsch. Bsp. $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2\}$, so ist $|A \cup B| = 2 \neq 2 + 1 = |A| + |B|$
- **Beobachtung**: $A \cup B = A \setminus B \cup B \setminus A \cup (A \cap B)$
- **Hinweis**: Aussage ist wahr für disjunkte Mengen $A, B$ mit $A \cap B = \emptyset$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ ist wahre Aussage: Anzahl der Tupel in $A \times B$ ist Produkt der Anzahl der Möglichkeiten für erste Komponente (also $|A|$) und der Anzahl der Möglichkeiten für die zweite Komponente (also $|B|$)

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1.$$

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1 \Leftrightarrow m + 2n + 3 = mn + m \Leftrightarrow 2n + 3 = mn$$

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir
$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1 \Leftrightarrow m + 2n + 3 = mn + m \Leftrightarrow 2n + 3 = mn$$
- Damit folgt
$$2n + 3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n + 3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \tag{1}$$

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir
$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1 \Leftrightarrow m+2n+3 = mn+m \Leftrightarrow 2n+3 = mn$$
- Damit folgt
$$2n+3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \tag{1}$$
und notwendigerweise $m = 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$, d.h. $n$ ist Teiler von 3

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir
$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1 \Leftrightarrow m+2n+3 = mn+m \Leftrightarrow 2n+3 = mn$$
- Damit folgt
$$2n+3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n+3}{n} = 2+\frac{3}{n} \tag{1}$$
und notwendigerweise $m = 2+\frac{3}{n} \in \mathbb{N}$, d.h. $n$ ist Teiler von 3
- $2n+3 = mn \Leftrightarrow n(2-m) = -3 \Leftrightarrow n = \dfrac{-3}{2-m} = \dfrac{3}{m-2} \Rightarrow m \neq 2.$

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir
$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1 \Leftrightarrow m + 2n + 3 = mn + m \Leftrightarrow 2n + 3 = mn$$
- Damit folgt
$$2n + 3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n + 3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \tag{1}$$
und notwendigerweise $m = 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$, d.h. $n$ ist Teiler von 3
- $2n + 3 = mn \Leftrightarrow n(2 - m) = -3 \Leftrightarrow n = \frac{-3}{2 - m} = \frac{3}{m - 2} \Rightarrow m \neq 2.$
- D.h. es ist nur möglich: $n \in \{1, -1, 3, -3\}$.

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir
$$\frac{m+2n+3}{m} = n+1 \Leftrightarrow m+2n+3 = mn+m \Leftrightarrow 2n+3 = mn$$
- Damit folgt
$$2n+3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \tag{1}$$
und notwendigerweise $m = 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$, d.h. $n$ ist Teiler von 3
- $2n+3 = mn \Leftrightarrow n(2-m) = -3 \Leftrightarrow n = \frac{-3}{2-m} = \frac{3}{m-2} \Rightarrow m \neq 2.$
- D.h. es ist nur möglich: $n \in \{1, -1, 3, -3\}$.
- Setzen wir diese vier Fälle in (1) ein, folgt für $n = -1$: $m = 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$, also keine Lösung.

# Beweise 4 - Aufgabe

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen $(m, n)$ mit $m \geq 1$ und

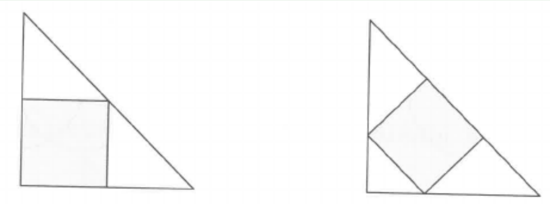
$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1$$

**Lösung:**

- Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir
$$\frac{m + 2n + 3}{m} = n + 1 \Leftrightarrow m + 2n + 3 = mn + m \Leftrightarrow 2n + 3 = mn$$
- Damit folgt
$$2n + 3 = mn \Leftrightarrow m = \frac{2n + 3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \tag{1}$$
und notwendigerweise $m = 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$, d.h. $n$ ist Teiler von 3
- $2n + 3 = mn \Leftrightarrow n(2 - m) = -3 \Leftrightarrow n = \dfrac{-3}{2 - m} = \dfrac{3}{m - 2} \Rightarrow m \neq 2.$
- D.h. es ist nur möglich: $n \in \{1, -1, 3, -3\}$.
- Setzen wir diese vier Fälle in (1) ein, folgt für $n = -1$: $m = 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$, also keine Lösung.
- Für die anderen Werte erhalten wir die drei Lösungen $(m, n) \in \{(5, 1), (3, 3), (1, -3)\}$

# Beweise 5 - Aufgabe

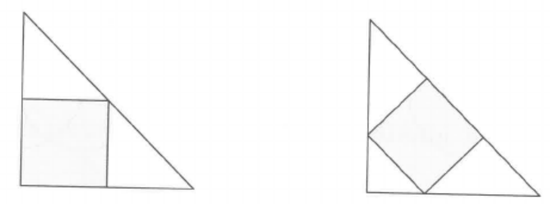
In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Gib möglichst viele Begründungen an!

# Beweise 5 - Aufgabe

In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



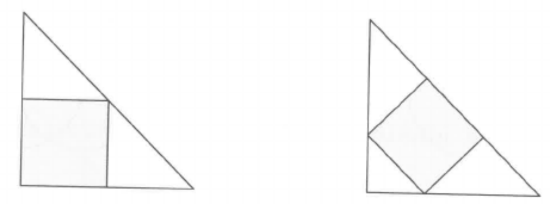
Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Gib möglichst viele Begründungen an!

**Lösungen:**

- Quadrat macht links halbe Fläche von Dreieck, rechts klar weniger ($= 4/9$)

# Beweise 5 - Aufgabe

In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



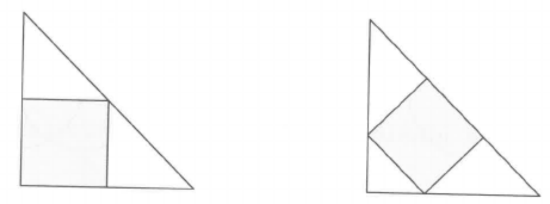
Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Gib möglichst viele Begründungen an!

**Lösungen:**

- Quadrat macht links halbe Fläche von Dreieck, rechts klar weniger $(= 4/9)$
- Die Seite des Quadrats links ist halbe kurze Seite von Dreieck, rechts $\sqrt{2}/3$

# Beweise 5 - Aufgabe

In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



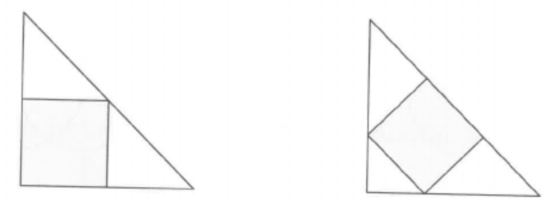
Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Gib möglichst viele Begründungen an!

**Lösungen:**

- Quadrat macht links halbe Fläche von Dreieck, rechts klar weniger ($= 4/9$)
- Die Seite des Quadrats links ist halbe kurze Seite von Dreieck, rechts $\sqrt{2}/3$
- Die Diagonale des Quadrates links ist $\sqrt{2}/2$ mal kurze Seite von Dreieck, rechts ist es $2/3$ mal kurze Seite von Dreieck

# Beweise 5 - Aufgabe

In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



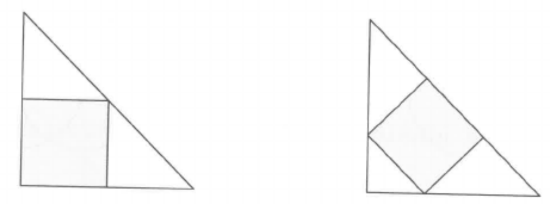
Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Gib möglichst viele Begründungen an!

**Lösungen:**

- Quadrat macht links halbe Fläche von Dreieck, rechts klar weniger ($= 4/9$)
- Die Seite des Quadrats links ist halbe kurze Seite von Dreieck, rechts $\sqrt{2}/3$
- Die Diagonale des Quadrates links ist $\sqrt{2}/2$ mal kurze Seite von Dreieck, rechts ist es $2/3$ mal kurze Seite von Dreieck
- Der Rest ohne Quadrat ist links so groß wie Quadrat, rechts $5/4$ des Qudrates

# Beweise 5 - Aufgabe

In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat eingelegt:



Welches Quadrat hat die größere Fläche?
Gib möglichst viele Begründungen an!

**Lösungen:**

- Quadrat macht links halbe Fläche von Dreieck, rechts klar weniger ($= 4/9$)
- Die Seite des Quadrats links ist halbe kurze Seite von Dreieck, rechts $\sqrt{2}/3$
- Die Diagonale des Quadrates links ist $\sqrt{2}/2$ mal kurze Seite von Dreieck, rechts ist es $2/3$ mal kurze Seite von Dreieck
- Der Rest ohne Quadrat ist links so groß wie Quadrat, rechts $5/4$ des Qudrates
- ...

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Durch Nachrechnen überprüft man die Aussage bis $n = 15$ und scheitert an $n = 16$:

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Durch Nachrechnen überprüft man die Aussage bis $n = 15$ und scheitert an $n = 16$:
- Es sind nur die Summen aus den Potenzen der Zahlen $2, 3, 4$ möglich, die sich als Summen aus den Elementen der Spalten ergeben:

$$\begin{array}{lll}
1 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 4 \\
4 & 9 & 16 \\
8 & 27 & 64 \\
16 & 81 & \cdots \\
\vdots & & \ddots
\end{array}$$

  Darin ist keine Summe von Werten aus allen drei Spalten 16.

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Alternative Lösung:

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Alternative Lösung:
- Es gibt keine Zerlegung von $n = 16$ mit zwei Einsen, da 14 keine Potenz der Zahlen $2, 3$ oder 4 ist.

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Alternative Lösung:
- Es gibt keine Zerlegung von $n = 16$ mit zwei Einsen, da 14 keine Potenz der Zahlen $2, 3$ oder 4 ist.
- Ebenso gibt es keine Zerlegung mit einer Eins, da 15 keine Summe von zwei obigen Potenzen ist.

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Alternative Lösung:
- Es gibt keine Zerlegung von $n = 16$ mit zwei Einsen, da 14 keine Potenz der Zahlen $2, 3$ oder 4 ist.
- Ebenso gibt es keine Zerlegung mit einer Eins, da 15 keine Summe von zwei obigen Potenzen ist.
- Also ist für die Zerlegung von 16 notwendig, dass bereits die Summe $2^a + 4^c$ stets gerade ist.

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Alternative Lösung:
- Es gibt keine Zerlegung von $n = 16$ mit zwei Einsen, da 14 keine Potenz der Zahlen $2, 3$ oder 4 ist.
- Ebenso gibt es keine Zerlegung mit einer Eins, da 15 keine Summe von zwei obigen Potenzen ist.
- Also ist für die Zerlegung von 16 notwendig, dass bereits die Summe $2^a + 4^c$ stets gerade ist.
- Dann muss aber $3^b$ auch gerade sein, ein Widerspruch!

# Beweise 6 - Aufgabe

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von $n$).

**Lösungen:**

- Alternative Lösung:
- Es gibt keine Zerlegung von $n = 16$ mit zwei Einsen, da 14 keine Potenz der Zahlen $2, 3$ oder 4 ist.
- Ebenso gibt es keine Zerlegung mit einer Eins, da 15 keine Summe von zwei obigen Potenzen ist.
- Also ist für die Zerlegung von 16 notwendig, dass bereits die Summe $2^a + 4^c$ stets gerade ist.
- Dann muss aber $3^b$ auch gerade sein, ein Widerspruch!
- (Dieses Argument geht auch mit vielen anderen Zahlen $n > 16$)