

Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Übungen 2B

Peter Parczewski



Mengen 1 - Aufgabe

Bestimme für die Mengen

$$A = \{H, a, l, l, o\}, \quad B = \{M, a, n, n, h, e, i, m\}, \quad C = \{B, a, n, a, n, e\}$$

die Mengen:

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B$
- $\mathcal{P}(C)$
- $(A \cup B) \setminus C$
- $A \setminus (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$
- $A \times C$

Mengen 1 - Aufgabe

Bestimme für die Mengen

$$A = \{H, a, l, l, o\}, \quad B = \{M, a, n, n, h, e, i, m\}, \quad C = \{B, a, n, a, n, e\}$$

die Mengen:

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B$
- $\mathcal{P}(C)$
- $(A \cup B) \setminus C$

Lösung:

- $A \cup B \cup C = \{H, a, l, o, M, n, h, e, i, m, B\}$
- $A \cap B = \{a\}$
- $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{B\}, \{a\}, \{n\}, \{e\}, \{B, a\}, \{B, n\}, \{B, e\}, \{a, n\}, \{a, e\}, \{n, e\}, \{B, a, n\}, \{B, a, e\}, \{B, n, e\}, \{a, n, e\}, \{B, a, n, e\}\}$
- $(A \cup B) \setminus C = \{H, a, l, o, M, n, h, e, i, m\} \setminus \{B, a, n, e\} = \{H, l, o, M, h, i, m\}$

Mengen 1 - Aufgabe

Bestimme für die Mengen

$$A = \{H, a, l, l, o\}, \quad B = \{M, a, n, n, h, e, i, m\}, \quad C = \{B, a, n, a, n, e\}$$

die Mengen:

- $A \setminus (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$
- $A \times C$

Lösung:

- $A \setminus (B \cup C) = \{H, a, l, o\} \setminus \{M, a, n, h, e, i, m, B\} = \{H, l, o\}$
- $A \cap B \cap C = \{a\}$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{H, l, o\} \cup \{B\} = \{H, l, o, B\}$
- $A \times C = \{H, a, l, o\} \times \{B, a, n, e\} = \{(H, B), (H, a), (H, n), (H, e), (a, B), (a, a), (a, n), (a, e), (l, B), (l, a), (l, n), (l, e), (o, B), (o, a), (o, n), (o, e)\}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$

- $f(x) = 2^x$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$

- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$

- $f(x) = 2^x$

- $f(x) = 2^{1/x}$

Funktionen 2 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ **Ja**
- $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$ **Ja**
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$ **Ja**
- $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ **Nein, da für $x = -1$ nicht definiert**
- $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}$ **Ja**
- $f(x) = 2^x = e^{x \ln(2)}$ **Ja**
- $f(x) = 2^{1/x}$ **Nein, da für $x = 0$ nicht definiert**

Funktionen 3 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{x}$

Funktionen 3 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2^x}$

Funktionen 3 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2^x}$
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin(\pi x^2)$

Funktionen 3 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2^x}$
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin(\pi x^2)$
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \frac{1+2^x}{x-x^2}$

Funktionen 3 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{x}$
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2^x}$
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin(\pi x^2)$
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \frac{1+2^x}{x-x^2}$
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \frac{x-1}{1+2^x}$

Funktionen 3 - JA/NEIN

Ist das eine Funktion?

- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{x}$ **Ja**
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2^x}$ **Ja**
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin(\pi x^2)$ **Ja**
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \frac{1+2^x}{x-x^2}$ **Nein, nicht definiert für $x = 0$**
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \frac{x-1}{1+2^x}$ **Nein, da $f(x) < 0$ für $x > 0$**

Funktionen - Erinnerung

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow f(A) = B$

bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt $f^{-1} : B \rightarrow A$, $y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von f** .

Funktionen 4 - Aufgabe

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$

Funktionen 4 - Aufgabe

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \rightarrow \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$

Funktionen 4 - Aufgabe

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \rightarrow \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**obere Gaußklammer**)

Funktionen 4 - Aufgabe

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \rightarrow \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**obere Gaußklammer**)
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ (**untere Gaußklammer**)

Funktionen 4 - Aufgabe

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$ **nur injektiv**
- $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : |M| < \infty\} \rightarrow \mathbb{N}, f(M) = 2^{|M|}$ **weder injektiv noch surjektiv**
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**obere Gaußklammer**) **nur surjektiv**
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ (**untere Gaußklammer**) **nur surjektiv**