Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Folien aller Vorlesungen

Peter Parczewski

1. Einführung

Wer redet da?

DR. PETER PARCZEWSKI

Universität Mannheim
Institut für Mathematik
LS Wirtschaftsmathematik II
(Stochastische Numerik)

Studium/Promotion:

- **Mathematik** (+ Physik + Biologie + Philosophie)

Lehre/Forschung:

- Stochastik + Funktionalanalysis + Numerik

Vorkurs Elemente

- Vorlesungen + Übungen (26.08 + 31.08 - 2.09)
- Videos aus Vorjahr (online)
- Folien (Webpage)
- Schulstoff Übungen (Vorjahre, Webpage)

Einführung (diese Folge)

1. Mathematik und Schulmathematik
2. Beispiel für Mathematik
3. Sätze und Beweise

Mathematik im Studium ist Neuanfang!

- Schulmathematik nützlich, aber nicht notwendig!

Was eher wichtig wird:

- Denken und Knobeln mögen
- Zusammenhänge verstehen wollen
- Mathematik machen und anwenden wollen
- Mathematische Sprache (saubere Begriffe und Argumente!) erlernen wollen

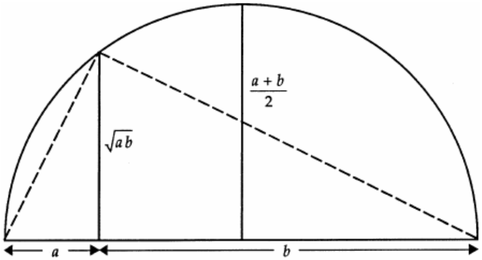
Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$?

- Sind alle Objekte definiert?
- $\frac{a+b}{2}$ existiert für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)
- $\sqrt{ab}$ existert in $\mathbb{R}$ nur für $ab \geq 0$
- Für $a, b \leq 0$ folgt $\frac{a+b}{2} \leq 0 \leq \sqrt{ab}$: Die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ kann dann nur noch für $a = b = 0$ erfüllt sein
- Also ist notwendig: $a, b \geq 0$
- Die Ungleichung ist äquivalent zu $2\sqrt{ab} \leq a + b \Leftrightarrow 0 \leq a + b - 2\sqrt{ab}$
- Das ist äquivalent zu $0 \leq \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
- Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geq 0$
- Also gilt für alle $a, b \geq 0$ die Ungleichung $0 \leq \sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
- Wegen Äquivalenzumformungen gilt also auch für alle $a, b \geq 0$ die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$?



- Allgemeiner: AM-GM-Ungleichung

  Seien $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, so gilt:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

  Ungleichung zwischen **A**rithmetischen und **G**eometrischen **M**ittel.

  $\rightsquigarrow$ Studium: Viele weitere Ungleichungen, Verallgemeinerungen, ...

Mathematik - Uni

Wiederholung Schulmathematik:

- **(MINT BW) Online-Brückenkurs** ▸ Link: Online-Brückenkurs
  Schulstoff und noch etwas mehr. Sehr sauber und ausführlich. Übungen integriert (Lösungen vorhanden). Abschlusstests.
- **Uni Mannheim VWL Wiederholungskurs**: ▸ Link: Skript
  Skript mit Beispielen und Übungen+Lösungen. Viele Begriffe werden in eurem Studium genauer eingeführt.
- **Uni Wien Materialien** ▸ Link: Mathematik macht Freu(n)de
  Vorkurs Mathematik (Schulstoff und mehr): ▸ Link: Vorkurs Mathematik
  Arbeitsblätter, Übungsblätter und Videos zu einer Fülle von Themen. Von Schulstoff bis ins Studium.
- **Hilfreicher im Studium:** Die in den Grundvorlesungen verwendete Literatur zu Analysis und Lineare Algebra (genauere Hinweise in den Vorlesungen bzw. generell bei allen Dozenten)

Sätze und Beweise

Satz

Für alle reellen $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Beweis.

Da $x^2 \geq 0$ für alle reellen x, ist für alle $a, b \geq 0$: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
Nach Umformen ist $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.
Also folgt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. $\square$

Satz

Die Kreiszahl π ist irrational.

Der Beweis ist hier zu lang: Angenommen, π ist rational, d.h. $\pi = \frac{m}{n}$ für natürliche Zahlen ...

Sätze und Beweise

Typische Sätze im Studium werden auch mal länger sein:

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Konstante K. Dann besitzt f genau einen **Fixpunkt** *$x^* \in X$ und die Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ gegen x^*. Zudem gilt die a priori Abschätzung*

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{K^k}{1-K} d(x_0, x_1).$$

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

  d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Logik

- Der **Beweis** ist logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und
- Definitionen (z.B. rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$)
- Sätze + Beweise $\Longrightarrow$ **neue** Sätze + **neue** Beweise

2. Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann.
Tertium non datur (Ein Drittes gibt es nicht) (ARISTOTELES).

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Am 26.08.1822 hat es in Mannheim geregnet
- Heute riecht es in Mannheim nach Schokolade
- Grüßgottle!
- 4
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (d.h. Primzahlen mit Differenz 2)
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 3 teilbar
- Dieser Satz ist falsch
- $\rightsquigarrow$ (Paradoxien, mathematische/philosophische Logik)

Sind A und B Aussagen, so bildet man zusammengesetzte Aussagen:

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B)
	(A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (A und B sind **äquivalent**)
	d.h. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Deren Wahrheitswerte werden durch Wahrheitstafeln definiert:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen?

- Mannheim liegt am Meer und $\pi^3 > \sqrt{11}^3$
- Wenn $4 > 7$, dann ist $\pi < 2$
- 309 ist genau dann eine Primzahl, wenn der Mars bewohnt ist
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$
- Donald kann lesen und Donald kann nicht lesen

Satz. Für jede Aussage A gilt:

- $A \vee \neg A$ ist immer wahr (**Tautologie**)
- $A \wedge \neg A$ ist immer falsch (**Kontradiktion/Widerspruch**)

Logische Äquivalenz von Aussagen mittels Wahrheitstafeln.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Also ist $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Wahrheitswerte weiterer zusammengesetzter Aussagen erfolgen analog iterativ.

A	B	C	$A \vee B$	$A \Rightarrow C$	$(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f
f	f	f	f	w	f

3. Mengen

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**).
Analog wird bei $=:$ bzw. $\Leftrightarrow:$ die rechte Seite definiert.

- $\sqrt{2} :=$ die positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst
- $n \in \mathbb{N}$ ist teilbar durch $m \in \mathbb{N}$ $:\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M $\quad (x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M))$

Definition einer Menge oftmals durch eine Aussageform:

$$M := \{x : p(x)\} \qquad \text{bzw.} \qquad M := \{x \,|\, p(x)\}$$

Mengen Beispiele:

- Beatles $:= \{$John Lennon, Paul McCartney, George Harrison, Ringo Starr$\}$
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (später genauer!)
- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$ (Es gibt hier nur drei verschiedene Elemente!)
- $\{n \in \mathbb{N} : n^2 < 10\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (Reihenfolge in Menge irrelevant!)
- $\{1, 2, \pi, \text{Olaf Scholz}, \{1, 2, 3\}\}$ (Elemente sind beliebig, können auch selbst Mengen sein!)

Mit **Quantoren** wird eine Aussage A (oft als Prädikat $A(\cdot)$) über Elemente einer Menge M getroffen:

$\forall x \in M : A$ **Für alle** Elemente x in M gilt A

$\exists x \in M : A$ **Es gibt (mindestens) ein** Element x in M, für das A gilt

$\exists! x \in M : A$ **Es gibt genau ein** Element x in M, für das A gilt

Statt $\forall x \in M : A(x)$ schreibt man auch $A(x),\ x \in M$

Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$ (Für alle natürliche Zahlen n gilt $n^2 \geq n$.
  Die Aussage ist also: Es gilt $1^2 \geq 1$ und $2^2 \geq 2$ und usw.
- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 11$ (Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n^2 = 11$)
- $n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$ (Definition: gerade bedeutet durch 2 teilbar)

Relationen und Definitionen für Mengen:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow \ \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow \ (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	**Gleichheit**
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	**Komplement** von B in A

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
- $\{1, 2\} \cap \{0, 1, 5\} = \{1\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(= 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N})$
- $\{n \in \mathbb{N} : n > 2\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 10\} = \{3\}$

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$ für $-\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$
- $A_1 \times \cdots \times A_N := \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : x_1 \in A_1, \ldots, x_N \in A_N\}$ Menge von **N-Tupeln**

Beachte den Unterschied:

- **Menge**: $\{\ldots\}$ - geschweifte Klammern - Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
- **Tupel/Vektor**: $(\ldots)$ - runde Klammern - Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

- $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$ ist eine (identische!) Menge
- $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1) \neq (3, 2, 1)$ sind drei verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen : $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$
- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Primzahlen** $\mathrm{Prim} := \{n : n \geq 2, n \text{ hat nur die Teiler 1 und } n\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (Analysis!). Es gilt: $\mathrm{Prim} \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- **Intervalle**

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)}\\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)}\\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, && \text{(halboffene Intervalle)}\\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{(halboffene Intervalle)}
\end{aligned}
$$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- $\emptyset \neq \{0\}$

Es ist:

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!
- $\mathcal{P}(\{1,\pi,\Omega\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{\Omega\}, \{1,\pi\}, \{1,\Omega\}, \{\pi,\Omega\}, \{1,\pi,\Omega\}\}$

Es gilt für jede Menge M:

- $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$

Die naive Definition der Menge führte zu Widersprüchen!
($\rightsquigarrow$ Grundlagenkrise der Mathematik)
Ist das eine Menge?

$$R := \{x \text{ Menge} : x \notin x\} \quad \text{(Russell 1903)}$$

4. Abbildungen

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B, \; a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $f(a) \in B$ zu.

- Unter einer **Funktion** (Abbildung) $f : A \to B$ für Mengen A, B versteht man also eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$.
- Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b.
- Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das **Bild** von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das **Urbild** von D.
- Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich/-menge** und A *Definitionsbereich/-menge* von f.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow \forall x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow f(A) = B$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A, \; y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von f**.

Beispiele für Funktionen:

- $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{gerade, ungerade\},\ f(x) = \begin{cases} gerade, & x \in \{2,4,6\} \\ ungerade, & x \in \{1,3,5\} \end{cases}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + c$ (allgemeine lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)

  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion und die Inverse ist dann $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Bijektion. Die Inverse ist die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.
- **Anzahl Elemente**: $|\cdot|\ : \{M \subset \mathbb{Z} : M \text{ endlich}\} \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, M \to |M|$
- **Indikatorfunktion** für eine Menge $M \subseteq A$:

  $\mathbb{1}_M : A \to \{0,1\},\ \mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$

Bekannt sind bereits viele elementare Funktionen und Eigenschaften (Definitionsmenge, Wertemenge, Symmetrie, Monotonie, Nullstellen, Extrema).

Elementare Funktionen:

- Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)
- Wurzelfunktion $\sqrt{x}$, Hyperbelfunktion $1/x$, rationale Funktionen $p(x)/q(x)$ (Polynome)
- Exponentialfunktion e^x ($e \approx 2.718$) und Inverse Logarithmusfunktion $\ln(x)$
- trigonometrische Funktionen $\sin(x), \cos(x)$

Hilfreiches Tool für Visualisierung von Funktionen und Berechnungen: `www.desmos.com`.

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow \forall x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von** f

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist sujektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist bijektiv
- Anzahl Elemente: $|\cdot| : \{M \subset \mathbb{Z} : M \text{ endlich}\} \to \mathbb{N}_0$ ist nur surjektiv
- Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, f(x) = e^x$ ist bijektiv

5. Beweismethoden

Direkter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man bei Voraussetzung von A zeigt, dass B gilt.

Satz. Das Quadrat jeder geraden Zahl ist auch gerade.
$(\forall n \in \mathbb{N} : n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \in 2\mathbb{N})$

Beweis.

Angenommen $n \in 2\mathbb{N}$, so gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Dann ist aber $n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2) \in 2\mathbb{N}$. □

Weitere direkte Beweise bisher:

- Unsere Beweise für logische Äquivalenz (Wahrheitstafeln)
- Unsere Beweise über Eigenschaften der leeren Menge
- Unsere Aufgaben zu Mengen

Beweis durch Kontraposition

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt zeigt.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

(Beweis durch Kontraposition heißt auch indirekter Beweis)

Satz. Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. $(\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N})$

Beweis.

Wir wollen also für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $n \notin 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \notin 2\mathbb{N}$: Angenommen $n \notin 2\mathbb{N}$, so ist es ungerade und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist aber $n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1 \notin 2\mathbb{N}$. $\square$

Beweis durch Widerspruch

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man annimmt, dass diese Aussage falsch ist, d.h. es gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, und zeigt, dass ein Widerspruch folgt.

A	B	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	f	f
f	f	f	f

Satz. Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. $(\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N})$

Beweis.

Sei $\neg\left(n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}\right)$, d.h. $(n^2 \in 2\mathbb{N}) \wedge (n \notin 2\mathbb{N})$. Da n ungerade, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist $n^2 = (2m-1)^2 \notin 2\mathbb{N}$, ein Widerspruch zur Annahme $n^2 \in 2\mathbb{N}$. $\square$

Beweis durch Widerspruch

Satz. $\forall a, b \in \mathbb{R} : 2ab \leq a^2 + b^2$.

Beweis.

Angenommen, die Aussage sei falsch, d.h. es ist $2ab > a^2 + b^2$, dann ist aber der Widerspruch $0 > a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$. □

Satz. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis (Euklid, 300 v. Chr.)

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $N \in \mathbb{N}$ viele. Sei ihr Produkt $p_1 \cdots p_N \in \mathbb{N}$ und p_N ist die größte mögliche Primzahl. Da $p_1 \cdots p_N + 1 \in \mathbb{N}$, muß es entweder selbst Primzahl sein (größer als p_N Widerspruch!) oder es hat eine Primfaktorzerlegung. Ein solcher Primteiler p teilt aber $p_1 \cdots p_N$ und $p_1 \cdots p_N + 1$, so müßte stets $p = 1$ sein, was keine Primzahl ist, ein Widerspruch! □

Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Für alle $b, c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ mindestens eine reelle Lösung.

Beweis.

Es genügt ein Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.
Seien $b = 0$ und $c = 1$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
Das Quadrat einer reellen Zahl ist nichtnegativ ($x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \rightsquigarrow$ **Studium**)
Also gibt es hier keine reelle Lösung x und die Aussage ist falsch. $\square$

Offenbar erhalten wir:

Satz. Es gibt $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ keine reelle Lösung besitzt.

Beispielsweise für $b = 0$ und $c = -1$ bzw. $b = c = 0$ erhalten wir ebenso:

Satz. Es gibt jeweils $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$

- genau zwei reelle Lösungen besitzt
- genau eine reelle Lösung besitzt.

Beweismethoden

Satz. Für jede ganze Zahl z ist die Summe von z und der Vorgängerzahl stets ungerade. ($\forall z \in \mathbb{Z} : z + (z-1) \notin 2\mathbb{Z}$ bzw. $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow z + (z-1) \notin 2\mathbb{Z}$)

Direkter Beweis ($A \Rightarrow B$).

Sei $z \in \mathbb{Z}$, so ist die zu untersuchende Summe $z + (z-1) = 2z - 1$. Das ist also stets ungerade. $\square$

Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$).

Wir zeigen: Ist besagte Summe gerade, dann ist $z \notin \mathbb{Z}$: Sei also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $z + (z-1) = 2z - 1 = 2m \in 2\mathbb{Z}$. Dann folgt aber $z = \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. $\square$

Beweis durch Widerspruch ($\neg(A \Rightarrow B) \rightsquigarrow$!)

Angenommen, die Aussage sei falsch, d.h. es gilt $z \in \mathbb{Z}$ und zugleich $2z - 1 \in 2\mathbb{Z}$. Dann gibt es also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $2z - 1 = 2m \in 2\mathbb{Z}$, d.h. wir erhalten den Widerspruch $z = \frac{2m+1}{2} \notin \mathbb{Z}$ und zugleich $z \in \mathbb{Z}$! $\square$

6. Induktion und Abzählen

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Wenn zugleich gelten:

1. Es gilt $A(1)$ (**Induktionsanfang**)
2. $\forall n \geq 1 \; : \; A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang kann auch ein festes $N > 1$ sein.

Für jede natürliche Zahl n gilt $3^n \geq n$ ($\forall n \in \mathbb{N} : 3^n \geq n$)

Beweis durch Induktion.

Für $n = 1$ ist klar $3^1 = 3 \geq 1$. (Das war der Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $3^n \geq n$. Dann ist für $n+1$:

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \geq n \cdot 3 = n + 2n \geq n + 1$$

(Das war der Induktionsschritt). $\square$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Betrachten wir die ersten Anordnungen:

$$1 \qquad 12|21 \qquad 123|132|213|231|312|321$$

Beweis durch Induktion.

Für 1 gibt es nur die Anordnung 1. (Induktionsanfang). Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Die weitere Zahl $(n+1)$ können wir bei den Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n, n+1$ an einer der Positionen 1 bis $n+1$ stellen. Steht sie an der ersten Position, gibt es nach Voraussetzung genau $A(n)$ Anordnungen. Steht sie an der zweiten Position ebenso, usw. Also ist

$$A(n+1) = A(n) \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1).$$

(Das war der Induktionsschritt). $\square$

Sei M eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen. Dann hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente.

Beweis durch Induktion.

Sei $M = \emptyset$, so hat $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$ genau ein Element. (Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage ist bereit wahr für $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist für eine Menge N mit $n+1$ Elementen $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$:
Eine Teilmenge enthält a_{n+1} oder nicht.
Es gibt nun nach **Induktionsvoraussetzung** genau 2^n Teilmengen ohne a_{n+1}.
Ebenso gibt es genau 2^n Teilmengen mit a_{n+1}.
Also ist die Anzahl der Teilmengen von N tatsächlich $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
(Induktionsschritt).

$\square$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \dots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Beweis durch Abzählen.

Wir zählen die Anzahl der Umordnungen von $1, 2, \dots, n$. Für das erste Element 1 haben wir n Plätze. Für das zweite Element 2 haben wir anschließend nur noch $n-1$ Plätze. Usw: Für das k-te Element haben $n-k+1$ Plätze. Also erhalten wir als Anzahl der Umordnungen $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ □

$$\begin{cases} (a+b)^1 = a+b \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \\ \vdots \end{cases}$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$:= Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: a^k enthalten
3. a^k nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus n Klammern $(a+b)$ jeweils genau k mal a
5. Das ist gerade die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$
6. also: Produkt $(a+b)^n$ ist Summe über alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
7. Damit folgt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ □

Geometrische Summe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1-x^{n+1}$$

2. Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis.

- Ausmultiplizieren ergibt 1.

  (da alle x^k, $k = 1, \ldots, n$ mit $+$ und $-$ vorkommen)
- 2. folgt direkt aus 1. durch Division mit $1-x \neq 0$ $\square$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{100}} = \frac{1-(1/2)^{101}}{1-1/2} = 2-2^{-100}$$

7. Beweisverfahren und Aufgaben lösen

Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- **Beweis durch vollständige Induktion**
- **Beweis durch Abzählen/Kombinatorik**: Man zählt die Objekte unterschiedlich ab, dies ergibt eine Gleichheit
- **Beweis durch Fallunterscheidung, Schubfachpinzip, ...**

- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei
- Von 25 Studierenden haben mindestens drei im gleichen Monat Geburtstag
- Werden 6 Elemente auf 4 Fächer verteilt, so gibt es stets ein Fach mit 2 Elementen:

●●	●	●●	●

Schubfachprinzip

Werden $n > k$ Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 2 Elementen.

Werden $n > 2k$ Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 3 Elementen.

Usw. ...

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

Allgemeines Schubfachprinzip

Werden n Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N} \;:\; \lceil n/k \rceil < n/k + 1$

Beweis.

Angenommen, in jedem Fach sind höchstens $\lceil n/k \rceil - 1$ Elemente, so sind insgesamt erst nur $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot (n/k + 1 - 1) = n$ Elemente verteilt, ein Widerspruch! □

- Bei einer Feier mit 30 Leuten sind mindestens $\lceil 30/7 \rceil = 5$, die am gleichen Wochentag Geburtstag haben
- In einer Gruppe von 100 Studenten sind mindestens $\lceil 100/30 \rceil = 4$, die bei 30 Fragen gleich viele korrekt beantworten

Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
8. Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
9. Abstrahiere: Verallgemeinerung?
10. Studiere verwandte Probleme und Theorien!
11. Variiere die Aussagen und Aufgaben!
12. Untersuche und rekonstruiere ähnliche Probleme!

8. Beispiele/Ausblicke

Fibonacci-Zahlen

Definition Fibonacci-Zahlen:

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Also sind die ersten Fibonacci-Zahlen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Das ist eine **rekursive** Folge.

Kann man die n-te Zahl direkt angeben?

Ja! - Explizite Formel:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Fibonacci-Zahlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Beweisidee.

- Die Rekursion $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ basiert auf zwei Werten.
- Seien also die ersten beiden $(1, 0)$ und $(0, 1)$ (linear unabhängig)
- Alle anderen Startwerte kann man daraus linear erhalten: $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$
- Also ist der Raum aller rekursiven Folgen mit der Vorschrift $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ zweidimensional ($\rightsquigarrow$ **Lineare Algebra**)
- Wir machen den Ansatz $F_n = c^n$
- aus $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ folgt $c^n = c^{n-1} + c^{n-2}$ bzw. $c^2 = c + 1$
- Diese Gleichung hat die zwei Lösungen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Man sieht direkt, dass $(1, \varphi)$ und $(1, \overline{\varphi})$ linear unabhängig sind
- Also F_n als Linearkombination von φ^n und $\overline{\varphi}^n$ schreiben: Nachrechnen $\rightsquigarrow$ Explizite Formel $\square$

Unendlichkeiten

Mengen wie

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ 2\mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^n$$

haben nicht endlich viele Elemente

d.h. sind nicht endlich (bzw. unendlich)

(Verschiedene *Arten* von Unendlichkeit $\rightsquigarrow$ Studium + Ausblicke später)

Eine wichtige Unterscheidung:

- Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann **beliebig groß** sein

  Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist aber immer noch endlich
- Die Menge $\mathbb{N}$ ist **unendlich**
- Studium (v.a. Analysis) $\rightsquigarrow$ n geht gegen Unendlich $\rightsquigarrow$ **Konvergenz**

Mächtigkeiten

Die Mengen X und Y heißen

gleichmächtig $(X \sim Y)$ $:\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Fkt. $f : X \to Y$

Die Menge M heißt:

- **endlich** $:\Leftrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Fkt. $f : M \to \{1, 2, \ldots, n\}$
  item **abzählbar** $:\Leftrightarrow$ $M \sim \mathbb{N}$
- **höchstens abzählbar** $:\Leftrightarrow$ M ist endlich oder abzählbar
- **überabzählbar** $:\Leftrightarrow$ M ist nicht abzählbar

Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente (sofern M endlich), ansonsten nur Vergleichbarkeit (z.B. $|M| \geq |\mathbb{N}|$)

- Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind abzählbar unendlich
- Jede Menge, die eine unendliche Menge als Teilmenge enthält, ist unendlich
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich ($\rightsquigarrow$ **Analysis**)

Satz

Für jede Menge M gilt: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subset M\}$ ist mächtiger als M, d.h. $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis (Cantor, 1890).

- Für endliche Mengen M ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} > |M|$ (Induktion, $\rightsquigarrow$ **LA, Ana**).
- Sei M nun unendlich.
- Da $M \sim \{\{x\} : x \in M\} \subset \mathcal{P}(M)$, ist also M bereits gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$, d.h. es gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
- Angenommen, $M \sim \mathcal{P}(M)$, so existiert eine Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$.
- Wir betrachten die Menge $A := \{x \in M : x \notin f(x)\}$.
- Weil $A \subset M$, ist also $A \in \mathcal{P}(M)$ und es existiert somit wegen der Bijektion ein eindeutiges Urbild $a \in M$ mit $f(a) = A$.
- Für dieses Element ist nun aber nach Definition von A:
  $a \in A \Leftrightarrow a \in f(a) \Leftrightarrow a \notin A$
- Dies ist ein Widerspruch!
- Also sind M und $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig.

$\square$