Blatt 4 - Lineare Algebra

Wiederholung: Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn das Gleichungssystem (für die Variablen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$) $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$ nur die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ besitzt. Ansonsten heißen sie **linear abhängig**.
Das **Skalarprodukt** der Vektoren $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_2)$ ist $vw = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$.
Die **euklidische Länge (bzw. Norm)** eines Vektors $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$.
Zwei Vektoren v und w haben den gemeinsamen Winkel ϕ mit $\cos(\phi) = \frac{vw}{\|v\|\|w\|}$

Aufgaben:

1

(a) Seien die Vektoren $a = (2,1)$ und $b = (1,3)$. Bestimme $a+b$ graphisch und rechnerisch!

(b) Zeige, dass die Vektoren $a = (0,2,7)$, $b = (7,-3,0)$, $c = (-5,3,3)$ linear abhängig aber paarweise linear unabhängig sind!

(c) Zwei Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) haben beide die Länge 2 und ihr Skalarprodukt hat den Betrag 4. Welchen Winkel bilden die Vektoren?

(d) Bestimme alle Vektoren der Länge 3 in der Ebene ($\mathbb{R}^2$), die senkrecht auf $(-4,3)$ stehen.

(e) Stelle die Gleichung der Geraden (evtl. mehrere Lösungen!) $y = m \cdot x + c$ auf, die durch den Punkt $(-2,-2)$ geht und deren Winkel zur x-Achse $\pi/6$ beträgt!

2

(a) Wo schneiden sich die Geraden bzw. wie liegen sie ansonsten zueinander:

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad g_2 : X = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimme den Abstand des Punktes $(2,1,1)$ von der Ebene

$x + y - z = -1$

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$15x + 3y = 30$$
$$5x + \frac{24}{25} y = 0$$

Lösungen: 1 (a): $a + b = (3,4)$, (b): selber!, (c): Winkel $\varphi \in \{0, \pi\}$ (d): $\pm(9/5, 12/5)$, (e): $y = (1/\sqrt{3}) \cdot x + \frac{2}{3}(\sqrt{3} - 3)$ oder $y = -(1/\sqrt{3}) \cdot x - \frac{2}{3}(3 + \sqrt{3})$, 2 (a): Schnittpunkt in $(1,2,1)$ $(\lambda = 1, \mu = 2)$, (b): $\sqrt{3}$, (c): $(x,y) = (-48, 250)$