

Blatt 3 - Funktionen

Wiederholung: Unter einer *Funktion* (Abbildung) $f : A \rightarrow B$ für Mengen A, B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$. Dabei ist b das *Bild* von a , bzw. a als *Urbild* von b . Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das *Bild* von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das *Urbild* von D . Die Menge $f(A)$ heißt *Wertebereich/-menge* und A *Definitionsbereich/-menge* von f .

Aufgaben:**1**

(a) Gib eine explizite Darstellung der folgenden Funktionen $y = f(x)$ an!

$$(1.) 3x + 5y = 10, \quad (2.) 4x^2 - 3y/2 + x = 9$$

(b) Bestimme einen größtmöglichen Definitionsbereich:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{4-x^2}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

(c) Bestimme einen größtmöglichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich:

$$f(x) = \sqrt{1-|x|}, \quad g(x) = \left(\sqrt{x-|x|}\right)^{-1}$$

(d) Skizziere die Graphen der Funktionen:

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2 + \sin(x), \quad h(x) = 2 \sin(x), \quad k(x) = -\cos(-x)$$

(e) Welche Symmetrien besitzen die Funktionen (bzw. deren Graphen):

$$f(x) = x^9 + 4x^7, \quad g(x) = \pi|x|, \quad h(x) = e^{-x}$$

(f) Bestimmen Sie zuerst Definitionsbereich und Wertebereich von f und, sofern vorhanden, die Umkehrfunktion f^{-1} :

$$(1.) y = \frac{3}{2}\sqrt{2x+3}, \quad (2.) y = 3^{x-2}, \quad (3.) y = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

2 Modellieren Sie den Tagesgang der Temperatur durch eine Sinusfunktion. Bestimmen Sie die Parameter aus den folgenden Angaben: Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit 25°C am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit 3°C am kältesten. Schätzen Sie damit die Temperatur um 10:00 Uhr.

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Welche Aussagen sind falsch? Erläutern Sie mit einem Beispiel:
- (1.) Wenn $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Extremalstelle von f .
 - (2.) Wenn x_0 eine Extremalstelle von f , dann ist $f'(x_0) = 0$.
 - (3.) Wenn $f'(x_0) < 0$, so ist der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein Hochpunkt des Graphen von f .
- (b) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$
- (1.) Zeichnen Sie den Punkt P auf dem Einheitskreis, so dass der zu P gehörende Winkel α zur x -Achse $\sin(\alpha) = 0.6$ erfüllt.
 - (2.) Begründen sie, dass für $\alpha \in (0, \pi/2)$ ein weiterer Punkt mit dieser Eigenschaft existiert.
 - (3.) Entnehmen Sie Ihrer Skizze einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$ und berechnen diesen Wert.
 - (4.) Erläutern Sie, dass für alle Winkel α gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$
- (c) Ist dies eine Aussage und ist sie wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!
- (1.) Eine Polynomfunktion geraden Grades wird nie negativ.
 - (2.) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.
 - (3.) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen.
 - (4.) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die reellen Zahlen als Definitionsmenge.
 - (5.) Alle Funktionen $f(x) = a^x (a > 0)$ sind streng monoton wachsend.
 - (6.) Die Definitionsmenge der Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}$ sind alle reellen Zahlen, die größer als 3 sind.

Lösungen: 1 (a): 1. $y = f(x) = 2 - 3x/5$, 2. $y = f(x) = \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{2}x - 6$, (b): $f : [1, 2) \cup (2, \infty)$, $g : (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$, (c): $f : D_f = [-1, 1]$, $W_f = [0, 1]$, g : nicht definiert, (d): selber!, (e): f : ungerade (Punktsymmetrie in $(0, 0)$), g : gerade (symmetrisch bzgl. y -Achse), h : mix, (f): $D_f = [-3/2, \infty)$, $W_f = [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \frac{6}{2}y^2 - \frac{7}{2}$, (2.) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (0, \infty)$, $f^{-1}(y) = 2 + \log_3(y)$, (3.) $D_f = (0, \infty)$, $W_f = [-4, 1)$, $f^{-1}(y) = \frac{1}{4}(\frac{1}{y} - 2)$, $2 \cdot 14^\circ C$, 3 (a): (1.) Falsch, kann Wendepunkt sein, Bsp. $f(x) = x^3$ in $x = 0$, (2.) Falsch, Betrag $f(x) = |x|$ in $x = 0$, (3.) Falsch, Bsp. $f(x) = -x$, (b): (1.) selber, (2.) gespiegelt, (3.) $\cos(\alpha) = 0.8$ (4.) selber, (c): (1.) Falsch, Bsp. $f(x) = x^2 - 2$, (2.) falsch, Bsp. $f(x) = 2$ hat Grad 0, (3.) wahr, (4.) falsch, in $x = 0$ nicht definiert, (5.) falsch, Bsp. $f(x) = 1/x$, (6.) falsch, größer gleich