Blatt 5 - Differentiation

Wiederholung:

Differentiationsregeln: $(f \cdot g)' = f'\,g + f\,g'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{(g)^2}$, $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

Aufgaben:

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert? Wo ist sie differenzierbar? Bestimme die Ableitung: $f(x) = \pi(x^2)^{-1/3}$, $\quad g(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$

(b) Welche Aussagen sind wahr?

1. Die Funktion $f(x) = e^{e^x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar
2. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar
3. Die Funktion $f(x) = \sqrt{\sqrt{|x|^4}}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar

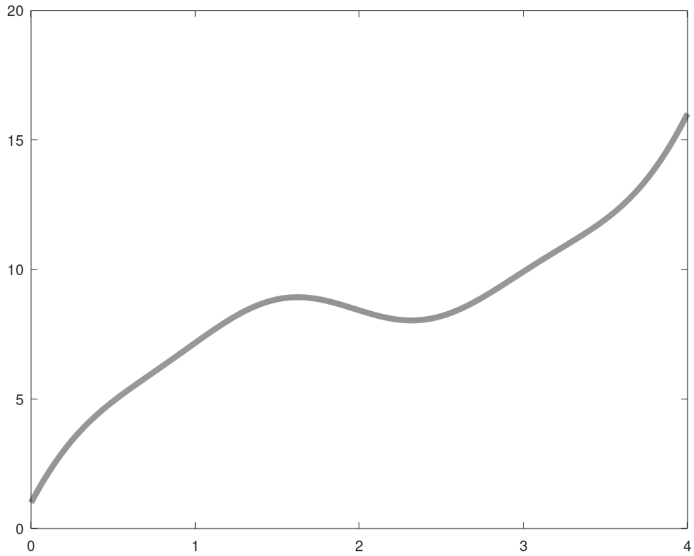
(c) Bestimme jeweils die Ableitung:

$$f(x) = 1 + x^{-2} - 2x^{-4},\ x \neq 0, \quad g(x) = 2\ln(x) - 3e^x + 5/x,\ x > 0$$

(d) Bestimme den Definitionsbereich und die Ableitung: $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

(e) Bestimme für jedes $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Ableitung von $f(x) = x^n \ln(x), x > 0$ Was fällt dir auf?

(f) Gegeben sei die differenzierbare Funktion f mit dem folgenden Graphen. Skizzieren Sie f'.



Lösungen: (a): f: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\frac{2\pi}{3}x(x^2)^{-4/3}$ ($x^{-5/3}$ nur für $x > 0$ definiert!), g: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g'(x) = 2x$, (b): wahr nur: 1,3, (c): $f'(x) = -2x^{-3} + 8x^{-5}$, $g'(x) = 2/x - 3e^x - 5x^{-2}$, (d): $x \in (-1, 1)$, $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, g: $x > 0$, $g'(x) = (1 - \ln(x))x^{-2}$, (e): Allgemein für $f(x) = x^n \ln(x)$: $f'(x) = x^{n-1}(n\ln(x) + 1)$, (f): selber!