Wettbewerb - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (1+1+3 Punkte)

Ein nerviger Waschbär muss von einem Gemüsegarten vertrieben werden. Hierzu ist ein nächtlicher Abwehrton von 49 kHz notwendig. Die alte Sirene trötet aber nur mit 5 kHz. Es gibt jedoch beliebig viele akustische Transformatoren, die jeweils genaue eine der folgenden Frequenzveränderungen erbringen:

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 3^x, \quad h(x) = x - 1.$$

Gesucht sind also Reihenfolgen von Operationen mittels f, g und h, die aus der Sirene mit 5 kHz einen Ton mit 49 kHz ergeben. Beispielsweise ist $5 \overset{h}{\mapsto} 4 \overset{f}{\mapsto} 8 \overset{f}{\mapsto} 16$.

(a) Gib eine Konstruktion des gesuchten Tones mit höchstens 12 Operationen an.

(b) Gib eine Konstruktion des gesuchten Tones mit < 10 Operationen an.

(c) Bestimme die minimale Anzahl von Operationen mit Beweis.

Lösung (a) Beispielsweise ist mit Verdoppeln und -1 mit neun Operationen:

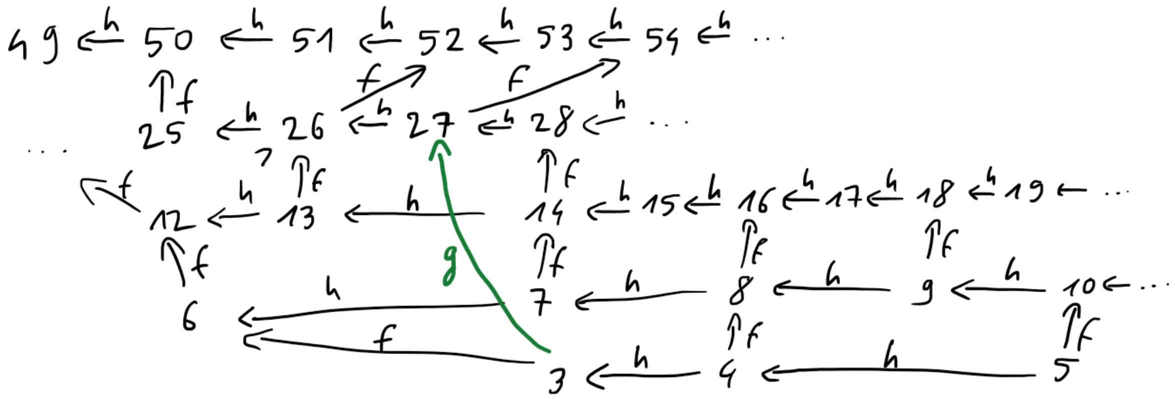
$$5 \overset{h}{\mapsto} 4 \overset{f}{\mapsto} 8 \overset{h}{\mapsto} 7 \overset{f}{\mapsto} 14 \overset{h}{\mapsto} 13 \overset{f}{\mapsto} 26 \overset{h}{\mapsto} 25 \overset{f}{\mapsto} 50 \overset{h}{\mapsto} 49.$$

(b) Man kann diese Kette von Operationen noch mittels g abkürzen:

$$5 \overset{h}{\mapsto} 4 \overset{h}{\mapsto} 3 \overset{g}{\mapsto} 27 \overset{h}{\mapsto} 26 \overset{h}{\mapsto} 25 \overset{f}{\mapsto} 50 \overset{h}{\mapsto} 49.$$

Es sind also mindestens 7 Operationen notwendig.

(c) Wir beweisen, dass es keine Konstruktion mit weniger als sieben Operationen gibt, indem wir die Konstruktion rückwärts durchgehen. 49 kann nur mittels h aus 50 gebildet werden. 50 kann mittels f aus 25 oder mittels h aus 51 gebildet werden. Die Funktion g hat eh nur die Bilder $3 = 3^1, 9 = 3^2, 27 = 3^3, 81 = 3^4$... (alles ab 3^4 ist schon viel zu groß). So erhalten wir das folgende Diagramm, welches zeigt, dass kein Pfad von 49 rückwärts kürzer als sieben sein kann. Unser kürzester Konstruktionspfad basiert auf der **Abkürzung** mittels der Funktion g und hat als einziger Konstruktionspfad nur 7 Operationen.

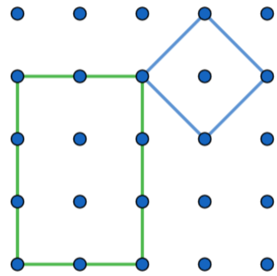


Gibt es einfachere und elegantere Lösungen? (⇝ **Mathe-AG**)

Aufgabe 2 (1+2+3 Punkte)

Gegeben sei ein quadratisches 5×5 Gitter von Punkten.

Es werden Rechtecke eingezeichnet. Jedes Rechteck hat hierbei jeweils vier verschiedene Punkte als Ecken.



Ein gerades **Rechteck** und ein schiefes **Quadrat**.

(a) Bestimme und begründe die Anzahl verschiedener gerader Quadrate, d.h. mit Seiten parallel zu den Seiten des Gitters.

(b) Bestimme und begründe die Anzahl verschiedener schiefer Quadrate, d.h. mit Seiten nicht parallel zu den Seiten des Gitters.

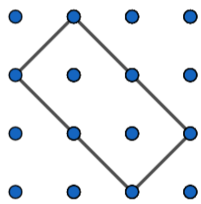
(c) Bestimme und begründe die Anzahl verschiedener Rechtecke in dem Gitter.

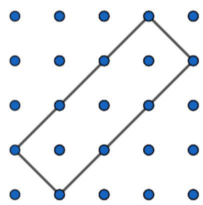
Lösung Sei der Abstand zweier benachbarter Punkte je Reihe oder Spalte 1.

(a) 30. Begründung: Wir zählen die geraden Quadrate mittels der Mittelpunkte. Anzahl der kleinsten Quadrate ist 4×4. Anzahl der Quadrate der Seitenlänge 2 ist Anzahl der Punkte des Gitters nicht am Rand, also 3×3. Anzahl der Quadrate der Seitenlänge 3 ist 2×2. Zudem gibt es das große Quadrat aller Gitterpunkte, also ist $1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

(b) 20. Jedes *schiefe* Quadrat hat die Ecken auf dem Rand eines *geraden* Quadrates aus (a). Im geraden Quadrat der Seitenlänge 1 gibt es nur die Ecken und daher kein schiefes Quadrat. Ein Quadrat der Seitenlänge 2 enthält genau ein schiefes Quadrat (ein **Quadrat** der Seitenlänge $\sqrt{2}$ wie in Abbildung). Ein Quadrat der Seitenlänge 3 hat bereits zwei neue verschiedene schiefe Quadrate. Das große Quadrat der Seitenlänge 4 beinhaltet drei weitere schiefe Quadrate. Damit ergibt sich mit Anzahlen für gerade Quadrate aus (a): $3^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 1 \times 3 = 9 + 8 + 3 = 20$.

(c) Obige Argumente direkt verallgemeinert: Neben den Quadraten haben wir horizontale (breiter als hoch) und vertikale (höher als breit) gerade Rechtecke. Abzählen mittels Mittelpunkten. Für die Rechtecke der Form 1×2 gibt es in jeder Zeile und Spalte genau drei Plätze. Also ist die Anzahl $4 \times 3 \times 2 = 24$. Für Rechtecke 1×3 ist die Anzahl $4 \times 2 \times 2 = 16$, für Rechtecke 1×4 ist die Anzahl $4 \times 1 \times 2 = 8$. Für Rechtecke der Form 2×3 ist die Anzahl $3 \times 2 \times 2 = 12$ und für Rechtecke 2×4 ist die Anzahl $3 \times 1 \times 2 = 6$. Die Anzahl der Rechtecke 3×4 ist $2 \times 2 = 4$. Also erhalten wir für die Anzahl der geraden Rechtecke mitsamt geraden Quadraten aus (a) insgesamt: $24+16+8+12+6+4+30 = 100$. Viel einfacher und eleganter ist direkt abzählen mittels zweier gegenüberliegender Ecken (Weitere Lösungen? $\rightsquigarrow$ **Mathe-AG**): Dies ergibt $\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2 = 10^2 = 100$.
Jedes schiefe Rechteck hat erneut die Ecken auf dem Rand eines Quadrates und kann sich nur aus den schiefen Quadraten in (b) zusammensetzen, da die Ecken Punkte im Gitter sind. Erst bei Quadraten ab Seitenlänge 3 haben wir jeweils zwei neue echte Rechtecke (die nicht Quadrate sind):





Damit erhalten wir mit (b) als Anzahl aller schiefen Rechtecke, die nicht Quadrate sind: $2^2 \times 2 + 1^2 \times 2 = 8 + 2 = 10$. Somit ist mit allen Anzahlen bisher $100 + 20 + 10 = 130$ die Anzahl verschiedener Rechtecke in dem 5×5 Gitter.