

Funktionalanalysis

Vorlesung HWS 2023

Dr. Peter Parczewski

5. September 2023



Veranstalter

Dr. Peter Parczewski peter.parczewski@uni-mannheim.de

Assistenten:

Maurice Schneider mauricesschneider@web.de (Doppel-s!)

Kenny Tran kenny.tim.tran@students.uni-mannheim.de

Sekretariat:

Karin Bühl karin.buehl@uni-mannheim.de

Lehrstuhl:

Wirtschaftsmathematik II: Stochastische Numerik
(Prof. Dr. Neuenkirch)

Alle Materialien in ILIAS:

- Skript, Folien (Vorlesungen und Quizze)
- 12 Übungsblätter, Übungen + Lösungen
- Übungen: Abgabe in 2-er Gruppen möglich

Vorlesungen (Präsenz):

Donnerstag 10.15-11.45 in C 014 Hörsaal, A 5, 6 Bauteil C

Freitag 10.15-11.45 in C 014 Hörsaal, A 5, 6 Bauteil C

Übungen:

Donnerstag 13.45-15.15 in C 012 Hörsaal A 5, 6 Bauteil C

- **Skript (wird fortwährend aktualisiert)**
- **Folien**
- **Übungen**
- **Forum**
- **Quizzes**
- **Ankündigungen**
- **alte Vorlesungen (Videos aus Vorjahren)**

Infos und Ankündigungen bis Vorlesungsbeginn auf Webpage

Mündliche Prüfungen

Termine (Dezember 2023 - Februar 2024) werden Nov/Dez vereinbart

Prüfungszulassung

Je 50% Punkte der Übungen in erster und zweiter Hälfte des Semesters

Funktionen als Elemente in einem Vektorraum

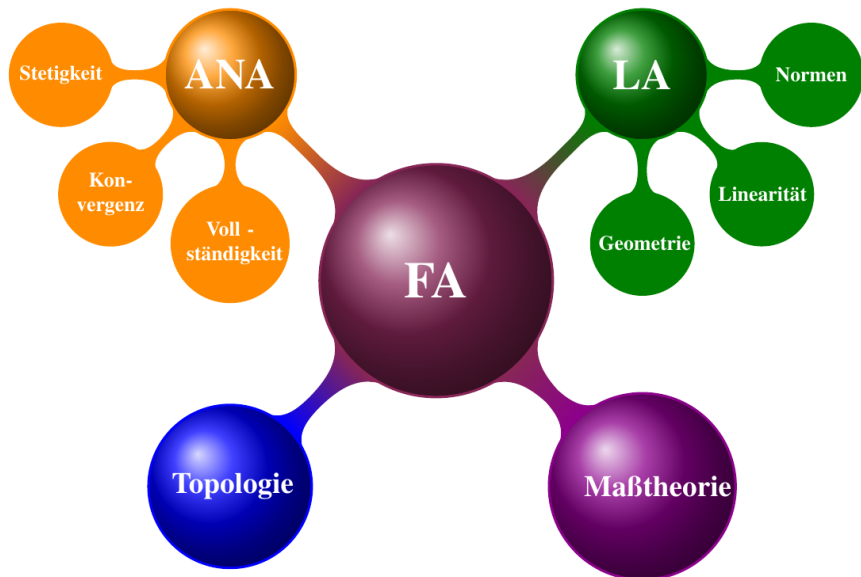
Werkzeuge

- Analysis (**ANA**) (Konvergenz, Approximation)
- Lineare Algebra (**LA**) (Lineare Strukturen, Geometrie)

Funktionalanalysis (FA) = ANA + LA

Einzige Voraussetzungen: ANA + LA

FA: Verbindungen und häufige Begriffe



- ▶ Differentialgleichungen (**Existenz, Approximation**)
- ▶ Stochastik (**stochastische Integration**)
- ▶ Numerik/Optimierung (**finite Elemente**)
- ▶ PDEs (**schwache Lösung**)
- ▶ Finanzmathematik (**Optionsbewertung**)

Beispiel: Integralgleichung

Gesucht ist eine Funktion $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^1 e^{s^2+t^2} x(t) dt + x(s) = \sin(s), \quad s \in [0, 1] \quad ?$$

FA ► Es existiert eindeutige stetige Lösung

FA ► allgemeine Theorie

(~ Randwertprobleme, ODEs, PDEs)

$$\int_0^1 \cos(\lfloor 10 st \rfloor) x(t) dt = \sin(s), \quad s \in [0, 1] \quad ?$$

(wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$)

FA ► Es existiert eindeutige Lösung $x \in L^2([0, 1])$

FA ► L^2 -Approximation mit Eigenwerten/Eigenfunktionen

Hinweise:

- 4 Multiple-Choice Fragen
- Es können 0 - 4 Antworten (A - D) korrekt sein!
- Wer solche Fragen interessant findet, ist bei Funktionalanalysis richtig!

Frage 1

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, wenn:

- A** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- B** f ist auf \mathbb{R} zweimal stetig differenzierbar
- C** $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 : \{f^{-1}(y) : |y - x| < \varepsilon\}$ ist offen
- D** Gleichmäßig stetig? Habe ich noch nie gehört!

Frage 2

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn:

- A** In jeder endlichen Überdeckung mit offenen Mengen $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ genügt bereits eine Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I'} O_i$ für $I' \subsetneq I$
- B** $\exists \varepsilon > 0 : A \subset \{x : \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} < \varepsilon\}$
- C** Das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen und unbeschränkt
- D** Kompakt? So wie Compact disc? Heute gibt es doch MP3!

Frage 3

Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Dann gilt:

- A** f ist stetig
- B** f ist differenzierbar
- C** f ist Lebesgue-integrierbar
- D** f ist gleichmäßig stetig

Frage 4

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

A f ist Lipschitzstetig, d.h.

$$\exists L \in (0, \infty) \forall x, y \in K : |f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|$$

B f ist beschränkt

C f nimmt auf K ein Minimum an

D $f(K)$ ist kompakt in \mathbb{R}

Frage 1

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, wenn:

- A** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ✓
- B** f ist auf \mathbb{R} zweimal stetig differenzierbar **Nö, z.B. $f(x) = e^x$**
- C** $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 : \{f^{-1}(y) : |y - x| < \varepsilon\}$ ist offen **Nö, s.o.**
- D** Gleichmäßig stetig? Habe ich noch nie gehört!

Frage 2

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn:

- A** In jeder endlichen Überdeckung mit offenen Mengen $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ genügt bereits eine Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I'} O_i$ für $I' \subsetneq I$

Nö, eine endliche Teilüberdeckung

- B** $\exists \varepsilon > 0 : A \subset \{x : \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} < \varepsilon\}$

Nö, nur wenn A abgeschlossen

- C** Das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen und unbeschränkt

Nö, \mathbb{Z}^n wäre sonst kompakt

- D** Kompakt? So wie Compact disc? Heute gibt es doch MP3!

Frage 3

Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Dann gilt:

- A** f ist stetig
- B** f ist differenzierbar
- C** f ist Lebesgue-integrierbar
- D** f ist gleichmäßig stetig

Frage 4

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

A f ist Lipschitzstetig, d.h.

$$\exists L \in (0, \infty) \forall x, y \in K : |f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|$$

Nö, z.B. $f(x) = \sqrt{x}$

B f ist beschränkt

C f nimmt auf K ein Minimum an

D $f(K)$ ist kompakt in \mathbb{R}