Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Lösungen zu Aufgaben (Folien 6)

Peter Parczewski

Aufgaben (6. Weitere Beweismethoden)

- Sei eine Gruppe von 150 Studenten. Wieviele haben mindestens im gleichen Monat Geburtstag?
- In Mannheim leben etwa 300 000 Menschen. Jeder Mensch hat höchstens 150 000 Haare auf dem Kopf. Gibt es in Mannheim zwei Menschen mit mehr als 5 und genau gleich vielen Haaren auf dem Kopf?

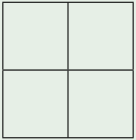
Lösung:

- Mit allgemeinen Schubfachprinzip folgt $\lceil 150/12 \rceil = 13$
- also gibt es mindestens 13 Studenten unter 150, die im gleichen Monat Geburtstag haben
- Die Aufgabe ist so etwas ungenau aufgeschrieben: wir nehmen natürlich an, dass die 300 000 Menschen schon mehr als 5 Haare besitzen. (Bzw. wenigstens 200 000)
- Mit dem Schubfachprinzip (150 000-6 Fächer) gibt es natürlich mindestens zwei mit der gleichen Anzahl von Haaren!

Aufgaben (6. Weitere Beweismethoden)

Beweise oder widerlege mit dem Schubfachprinzip: Unter je fünf Punkten in einem

Quadrat der Seitenlänge 2 gibt es mindestens zwei mit Abstand $\leq \sqrt{2}$.

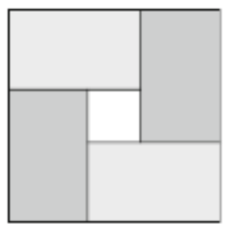


Lösung:

- Die eingezeichneten Quadrate sind gerade die Mengen der Punkte, die untereinander höchstens den Abstand $\leq \sqrt{2}$ haben.
- Verwenden wir diese 4 Quadrate als Fächer
- So liegen nach dem Schubfachprinzip von den 5 Elementen mindestens zwei in einem Fach
- Damit haben mindestens zwei Punkte einen Abstand $\leq \sqrt{2}$

Aufgaben (6. Weitere Beweismethoden)

Welche Ungleichung für $a, b \geq 0$ kann man aus diesem Bild gewinnen?



Lösung:

- Bezeichnet man die Seiten der Rechtecke (alle gleich - da in der Mitte und außen Quadrat) mit a und b
- so folgt die Ungleichung: Fläche der vier Rechtecke $\leq$ Fläche des Quadrats außen, d.h. $4ab \leq (a+b)^2$
- Umformen ergibt $\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2ab \leq a^{+} b^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$
- AM-GM-Ungleichung für a^2, b^2
- Zudem erhalten wir Bedingung für echte Ungleichung: $a \neq b \Rightarrow 4ab < (a+b)^2$

Aufgaben (6. Weitere Beweismethoden)

Finde einen Bildbeweis/Beweisidee für die Summenformel

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung:

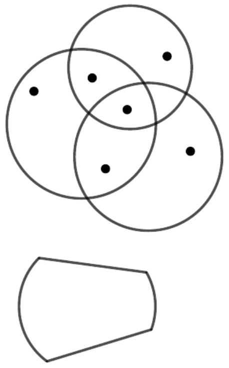
- selber!
- Zum Beispiel als zwei Dreiecke von Punkten anordnen, die sich zu einem Rechteck mit $n(n+1)$ Punkten anordnen lassen

Aufgaben (7. Weitere Aufgaben)

- Das sind alles Aufgaben aus unseren Mathematik-Wettbewerben vom Tag der Mathematik
- Knobeln Sie selber!

Aufgaben (7. Weitere Aufgaben)

Bäuerin Berta hat eine Horde aggressiver Hühner und will sie einzeln trennen und vor Füchsen beschützen. Handwerker Bob bietet ihr kostengünstige Zäune an, die stets kreisförmig sind und sich beliebig übereinander stellen lassen. Beispielsweise kann man mit 3 solchen Zäunen 6 Hühner aufteilen (erste Figur). Die Hühner können frei bewegt werden.



(A) Wie viele Kreiszäune braucht Bäuerin Berta mindestens für ihre 22 Hühner?

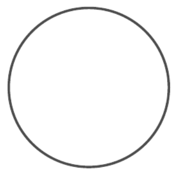
(B) Wie viele Hühner können mit $n \in \mathbb{N}$ Kreiszäunen maximal getrennt werden?

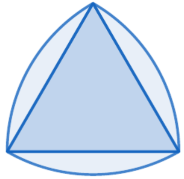
(C) Mit einem schweren Hammer schafft es Berta, flache Ränder in die Kreiszäune zu schlagen (z.B siehe untere Figur). Wie viele solcher gehämmerten Zäune genügen nun bereits für die 22 Hühner?

Aufgaben (7. Weitere Aufgaben)

Für welche natürlichen Zahlen n kann ich ein Quadrat in n Quadrate zerlegen?

Beide Figuren sind mit einem Zirkel konstruiert und haben den Durchmesser 1:





Hat eine Figur den größeren Umfang? Wenn ja, welche?

Aufgaben (7. Weitere Aufgaben)

Beweise oder widerlege:
Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lässt sich als Summe von genau drei Potenzen von 2, 3 und 4 schreiben, d.h. es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass:

$$n = 2^a + 3^b + 4^c$$

(eventuell gibt es mehrere Zerlegungen von n).

In der Ebene sei jeder Punkt entweder schwarz oder weiß.
Beispielsweise wie rechts.
Zu jeder beliebigen Einfärbung gibt es mindestens zwei Punkte mit Abstand π gleicher Farbe.