Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Lösungen zu Aufgaben (Folien 4-5)

Peter Parczewski

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Aufgaben (4. Beweismethoden)

Beweise jeweils mit allen drei Beweismethoden

1. Direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
2. Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
3. Beweis durch Widerspruch ($\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightsquigarrow !$)

die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.
- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.
- Seien die Mengen A, B, C. Wenn $A \subseteq B$, dann ist $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Aufgaben (4. Beweismethoden)

Beweise jeweils mit allen drei Beweismethoden die Aussage:

- Gilt für die reelle Zahl $x > 0$, dann ist $x + 1 > 1$.

Lösung:

Direkter Beweis: Sei $x > 0$.

- Da für Ungleichungen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ folgt für $a = 0, b = x, c = 1$ direkt $1 = 0 + 1 < x + 1$.

Beweis durch Kontraposition: Angenommen, es gilt Negation von $x + 1 > 1$, d.h. es ist $x + 1 \leq 1$.

- Erneut verwenden wir: für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Also ist hier für $a = x + 1, b = 1, c = -1$: $x = x + 1 - 1 \leq 1 - 1 = 0$
- das ist gerade die Negation von $x > 0$, d.h. wir haben die Kontraposition bewiesen.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es ist $x > 0$ und nicht $x + 1 > 1$.

- Dann ist also $x > 0$ und $x + 1 \leq 1$.
- Wie verwenden wieder: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Für $a = 0, b = x, c = 1$ folgt also insgesamt $1 = 0 + 1 < x + 1 \leq 1$, d.h. $1 < 1$ ein Widerspruch!

Aufgaben (4. Beweismethoden)

Beweise jeweils mit allen drei Beweismethoden die Aussage:

- Jede Primzahl größer als 2 ist ungerade.

Lösung:

Direkter Beweis: Sei die Primzahl $p > 2$ (d.h. es ist $p \in \mathbb{N}$ und hat nur die Teiler 1 und p)

- Eine natürliche Zahl ist nur gerade, wenn sie den Teiler 2 hat, also ist p ungerade.

Beweis durch Kontraposition: Angenommen, es gilt Negation von $p \in \mathbb{N}$ ist ungerade, d.h. p ist gerade. (Da jede gerade Zahl größer 2 schon mindestens 3 verschiedene Teiler hat)

- Dann hat p den Teiler 2 (oder ist gar selbst 2) und ist insbesondere keine Primzahl > 2

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es ist $p > 2$ Primzahl und nicht ungerade.

- Dann ist p gerade. Die einzige gerade Primzahl ist aber nur 2, ein Widerspruch zu $p > 2$!

Aufgaben (4. Beweismethoden)

Beweise jeweils mit allen drei Beweismethoden die Aussage:

- Seien die Mengen A, B, C. Wenn $A \subseteq B$, dann ist $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Lösung:

Direkter Beweis: Wir zeigen: Alle Elemente in $C \setminus B$ sind auch Elemente in $C \setminus A$:

- Sei $x \in C \setminus B$, d.h. es gilt $(x \in C) \wedge \neg(x \in B)$
- Da bereits $A \subseteq B$, gilt also $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
- Somit ist (Kontraposition ist logisch äquivalent): $\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)$
- Also erhalten wir $(x \in C) \wedge \neg(x \in B) \Rightarrow (x \in C) \wedge \neg(x \in A)$, d.h. $x \in C \setminus A$

Beweis durch Kontraposition: Angenommen, es gilt Negation von $C \setminus B \subseteq C \setminus A$, d.h. es existiert ein $x \in C \setminus B$ mit $x \notin C \setminus A$

- Also gilt $(x \in C) \wedge (x \notin B) \wedge \neg((x \in C) \wedge (x \notin A))$
- $\Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin B) \wedge ((x \notin C) \vee (x \in A)) \Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in A)$
- d.h. $x \in A \setminus B$ und es gilt die Negation von $A \subseteq B$

Beweis durch Widerspruch: selber, verwende z.B. obige Umformungen

Aufgaben (4. Beweismethoden)

Seien A und B endliche Mengen und $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Beweise oder widerlege die Aussagen:

- Es gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Lösung:

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ ist im allgemeinen falsch. Bsp. $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2\}$, so ist $|A \cup B| = 2 \neq 2 + 1 = |A| + |B|$
- (*Hinweis:* Aussage ist allgemein wahr für Mengen A, B mit $A \cap B = \emptyset$)
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ ist wahre Aussage: Anzahl der Tupel in $A \times B$ ist Produkt der Anzahl der Möglichkeiten für erste Komponente (also $|A|$) und der Anzahl der Möglichkeiten für die zweite Komponente (also $|B|$)

Aufgaben (5. Induktion und Abzählen)

Beweise mit vollständiger Induktion:

- Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
- Geometrische Summe: Für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
- Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$.

Aufgaben (5. Induktion und Abzählen)

Beweise mit vollständiger Induktion:

- Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung:

- Für $n = 1$ ist die Formel offenbar $1 = 1$ wahr.
- Angenommen, die Formel ist bereits für $n \in \mathbb{N}$ wahr.
- Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = (1 + 2 + \cdots + n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

- Umformen ergibt $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- Das ist gerade die Formel für $n + 1$ und die Induktion ist fertig

Aufgaben (5. Induktion und Abzählen)

Beweise mit vollständiger Induktion:

- Geometrische Summe: Für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
  $$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Lösung:

- Für $n = 1$ ist die Formel $1 + x = \frac{1-x^{1+1}}{1-x}$ wahr
- Angenommen, die Formel ist bereits wahr für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung
- $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$
- Umformen der rechten Seite ergibt also
- $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$
- Also erhalten wir die Formel für $n + 1$ und die Induktion ist fertig

Aufgaben (5. Induktion und Abzählen)

Beweise mit vollständiger Induktion:

- Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$.

Lösung:

- Für $n = 4$ ist die Formel $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$ wahr
- Angenommen, die Formel ist bereits wahr für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung und $n \geq 4$
- $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 4n \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
- Also erhalten wir die Formel für $n + 1$ und die Induktion ist fertig

Aufgaben (5. Induktion und Abzählen)

Beweise mit Induktion oder Abzählen die Aussage:

Die Summe der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots, (2n-1)$ ist n^2.

Lösung:

- Mit Induktion: Für $n = 2$ ist $1 + (2 \cdot 2 - 1) = 1 + 3 = 4 = 2^2 = n^2$ wahr
- Angenommen, die Formel gilt bereits für $n \in \mathbb{N}$, so ist nach Induktionsvoraussetzung für die Summe der ungeraden Zahlen bis $(2(n+1) - 1) = 2n + 1$:
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) =$ $(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
- Also erhalten wir die Formel für $n + 1$ und die Induktion ist fertig