Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Lösungen zu Aufgaben (Folien 2-3)

Peter Parczewski

Aufgaben (2. Mengen)

Bestimme für die Mengen

$$A := \{1, 2\},\ B := \{\{1\}, \{2\}\},\ C := \{1, \{1, 2\}\},\ D := \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

welche Aussagen wahr sind:

- $A = B$
- $A \in C$
- $A \subseteq C$
- $B \in D$
- $B = D \setminus \{1, 2\}$
- $\{A\} \in D$
- $A \cap D = \{\emptyset\}$
- $A \cup B \cup C \cup D \in \mathbb{N}$
- $B \cap C = A \setminus \{2\}$

Lösung: (mittels **W** wahr und **F** falsch)

- $A = B$ **F**
- $A \in C$ **W**
- $A \subseteq C$ **F**
- $B \in D$ **F**
- $B = D \setminus \{1, 2\}$ **F**
- $\{A\} \in D$ **F**
- $A \cap D = \{\emptyset\}$ **F**
- $A \cup B \cup C \cup D \in \mathbb{N}$ **F**
- $B \cap C = A \setminus \{2\}$ **F**

Aufgaben (2. Mengen)

Beweise für Mengen A, B, C die Gleichheit mittels $\subseteq$ und $\supseteq$:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Lösung:

- Für $x \in (A \cup B) \cup C$ gilt $x \in (A \cup B) \vee (x \in C)$
- d.h. $(x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)$
- Ebenso ist aber für $x \in A \cup (B \cup C)$: $(x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)$
- Also ist Vereinigung assoziativ: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- Sei $x \in A \setminus (B \cup C)$, d.h. $(x \in A) \wedge (x \notin B \cup C)$
- Hier ist
  $x \notin B \cup C \Leftrightarrow \neg(x \in B \cup C) = \neg((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow (x \notin B) \wedge (x \notin C)$
- Letzteres aufgrund logischer Äquivalenz $\neg(U \vee V) \Leftrightarrow (\neg U) \wedge (\neg V)$
- (Aussagenlogik - leicht überprüfbar mit Wahrheitswerttabellen)
- Also $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in (A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C)$
- d.h. es gilt $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Aufgaben (2. Mengen)

Bestimme für die Mengen

$$A = \{H, a, l, l, o\},\ \ B = \{M, a, n, n, h, e, i, m\},\ \ C = \{B, a, n, a, n, e\}$$

die Mengen:

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B$
- $\mathcal{P}(C)$
- $(A \cup B) \setminus C$
- $A \setminus (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$
- $A \times C$

Lösung:

- $A \cup B \cup C = \{H, a, l, o, M, n, h, e, i, m, B\}$
- $A \cap B = \{a\}$
- $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{B\}, \{a\}, \{n\}, \{e\}, \{B, a\}, \{B, n\}, \{B, e\}, \{a, n\}, \{a, e\}, \{n, e\},$
  $\{B, a, n\}, \{B, a, e\}, \{B, n, e\}, \{a, n, e\}, \{B, a, n, e\}\}$
- $(A \cup B) \setminus C = \{H, a, l, o, M, n, h, e, i, m\} \setminus \{B, a, n, e\} = \{H, l, o, M, h, i, m\}$

Aufgaben (2. Mengen)

Bestimme für die Mengen

$$A = \{H, a, l, l, o\},\ \ B = \{M, a, n, n, h, e, i, m\},\ \ C = \{B, a, n, a, n, e\}$$

die Mengen:

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B$
- $\mathcal{P}(C)$
- $(A \cup B) \setminus C$
- $A \setminus (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$
- $A \times C$

Lösung:

- $A \setminus (B \cup C) = \{H, a, l, o\} \setminus \{M, a, n, e, i, h, m, B\} = \{H, l, o\}$
- $A \cap B \cap C = \{a\}$
- $(A \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{H, l, o\} \cup \{B\} = \{H, l, o, B\}$
- $A \times C = \{H, a, l, o\} \times \{B, a, n, e\} = \{(H, B), (H, a), (H, n), (H, e), (a, B),$
  $(a, a), (a, n), (a, e), (l, B), (l, a), (l, n), (l, e), (o, B), (o, a), (o, n), (o, e)\}$

Aufgaben (2. Mengen)

Welche Aussagen für die Mengen A, B und C sind immer wahr?
Gibt es ansonsten ein Gegenbeispiel?

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Lösung:

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ falsch: Bsp. $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, C = \{2, 3\}$:
- $(A \setminus B) \setminus C = \{1\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$
- $A \setminus (B \setminus C) = \{1, 2\} \setminus \emptyset = \{1, 2\}$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ wahr:
- Nachrechnen mit Aussagen und Wahrheitswerttabellen
- $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (x \in C)$
- $\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Aufgaben (3. Funktionen)

Welche Vorschriften sind Funktionen (d.h. welche sind wohldefiniert?) Skizziere die Funktion (außer *)! Welche Funktion ist injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = (x+1)^2 - 1$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x - \pi/2)$
- $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(x)$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3(2^n)$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \max\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leq x\}$
- * $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), f(M) = M \cap \mathbb{Q}$

Lösung:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ keine der genannten Eigenschaften
- $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = (x+1)^2 - 1$ bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x - \pi/2)$ keine der genannten Eigenschaften
- $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(x)$ nur injektiv

Aufgaben (3. Funktionen)

Welche Vorschriften sind Funktionen (d.h. welche sind wohldefiniert?) Skizziere die Funktion (außer *)! Welche Funktion ist injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = (x+1)^2 - 1$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x - \pi/2)$
- $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(x)$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3(2^n)$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \max\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leq x\}$
- * $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), f(M) = M \cap \mathbb{Q}$

Lösung:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = 3(2^n)$ nur injektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$ in $x = 0$ nicht definiert! $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(n) = \max\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leq x\}$ nur surjektiv
- * $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), f(M) = M \cap \mathbb{Q}$ nur surjektiv