

Mathematisches Präludium

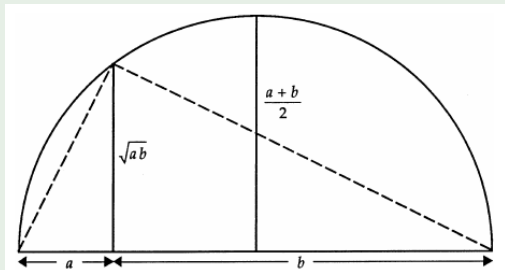
Ein Mathematik Vorkurs - Lösungen zu Aufgaben (Folien 0-1)

Peter Parczewski



Aufgaben (0. Einführung)

Begründe die eingezeichneten Längen \sqrt{ab} und $\frac{a+b}{2}$:

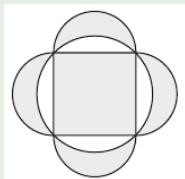


Lösung:

- Der Radius ist klar $(a+b)/2$
- Höhe h im rechtwinkligen Dreieck: Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke:
 $a/h = h/b \Rightarrow h = \sqrt{ab}$
- Alternativ: $h = \sqrt{ab}$ folgt mit Pythagoras

Aufgaben (0. Einführung)

Betrachte in der Figur rechts nun ein Rechteck statt einem Quadrat.
Haben dann die gebildeten Mondsicheln auch die Fläche des Rechtecks?



Lösung:

- Die Fläche des Rechtecks ist gleich der Fläche der Mondsicheln
- Die Mondsicheln sind nun verschieden, aber die Begründung ist analog
- Auch der Bildbeweis mit Pythagoras für Halbkreise ist analog!

Aufgaben (1. Aussagen)

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- Pommes mit Ketchup.
- Im Durchschnitt regnet es in Mannheim halb so viel wie in London.
- Es gibt weiteres Leben (auf Planeten, Monden) in unserem Sonnensystem.
- Auf einer Kirchenorgel sollte nur Bach gespielt werden.
- Wenn es in Mannheim nach Schokolade duftet, dann ist Sommer.

Lösung:

- Keine Aussage
- Aussage, falsch
- Aussage, Wahrheit noch unklar
- Keine Aussage (sollte?)
- Aussage, falsch

Aufgaben (1. Aussagen)

Untersuche den Wahrheitswert (durch Wahrheitstabelle) der zusammengesetzten Aussagen (aus den Aussagen A und B):

- $(A \vee B) \Rightarrow B$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge A$
- Folgere (ohne weitere Tabellen), welche Aussage wahr ist:
 - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
 - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$
 - $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$

Lösung:

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B)$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge A$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	f
f	f	f	w	w	f

- Wahrheitswerte von $(A \vee B) \Rightarrow B$ und $(A \Leftrightarrow B) \wedge A$ nicht identisch
- Nur Aussage $((A \vee B) \Rightarrow B) \Leftarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge A)$ immer wahr (d.h. Tautologie)

Aufgaben (1. Aussagen)

Donald und Boris verhandeln. Donald sagt von Montag bis Freitag und Boris von Montag bis Donnerstag stets die Unwahrheit. An den restlichen Tagen sagen Sie stets die Wahrheit. Sie begegnen sich beim Frühstück:

Boris: Gestern habe ich nur gelogen.

Donald: Ich auch.

Welcher Tag ist heute?

Lösung:

- Jeder sagt entweder Wahrheit und Unwahrheit
- Sagt er die Wahrheit, dann war am Vortag ein Tag der Unwahrheit
- Sagt er die Unwahrheit, dann war am Vortag ein Tag der Wahrheit
- Boris kann diese Aussage nur am Freitag (sagt die Wahrheit) oder Montag (sagt die Unwahrheit) machen
- Donald kann diese Aussage nur am Samstag (sagt die Wahrheit) oder Montag (sagt die Unwahrheit) machen
- Also ist Montag

Aufgaben (1. Aussagen)

Gegeben sind die beiden Aussagen

A Das Viereck ist ein Quadrat

B Die Diagonalen des Vierecks stehen senkrecht aufeinander

- Ist A notwendig für B?
- Ist A hinreichend für B?
- Ist A notwendig und hinreichend für B?

Lösung:

- Jedes Quadrat hat senkrechte Diagonalen
- Eine Raute hat senkrechte Diagonalen und ist nicht notwendig ein Quadrat
- Also gilt für die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg(B \Rightarrow A)$
- Also ist A hinreichend aber nicht notwendig für B

Aufgaben (1. Aussagen)

Welche Symbole aus \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow ergeben jeweils wahre Aussagen?

- $x^2 = 9$??? $x = 3$
- $x^2 = 9$??? $x = 3$ oder $x = -3$
- $x = \sqrt{9}$??? $x = 3$
- $x = \sqrt{9}$??? $x = 3$ oder $x = -3$
- $x = a \cdot b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N}$??? $x \in \mathbb{N}$
- $x \neq a \cdot b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$??? x ist prim

Lösung:

- $x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$ (denn es gilt auch $x = -3 \Rightarrow x^2 = 9$)
- $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ oder $x = -3$
- Da $\sqrt{9} = 3$: $x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$
- Ebenso: $x = \sqrt{9} \Rightarrow x = 3$ oder $x = -3$
- $x = a \cdot b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$
- Keine wahre Aussage möglich: $x \neq a \cdot b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$? x ist prim

Aufgaben (1. Aussagen)

Ist das eine Aussage und, falls ja, ist sie wahr?

- $3 < 6 \Rightarrow \pi$
- $3 < 6 \Rightarrow \pi$ ist gerade
- $3 > 6 \Rightarrow \pi$ ist gerade
- n ist gerade $\Rightarrow n^2$ ist gerade
- n ist gerade $\Leftarrow n^2$ ist gerade

Lösung:

- Keine Aussage (da π keine Aussage!)
- Aussage, falsch
- Aussage, wahr (!)
- Aussage, wahr (stillschweigend $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt)
- Aussage, wahr (stillschweigend $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt)